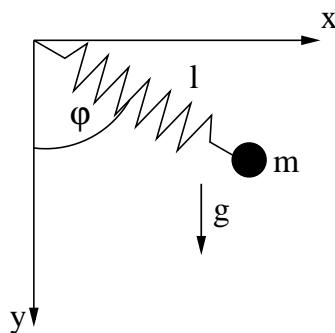


Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als ein Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse m , der über eine masselose Feder am Koordinatenursprung befestigt ist und der sich frei in der x - y -Ebene bewegen kann. Die Länge der Feder im ungedehnten Zustand sei l_0 , die Federkonstante $k > 0$. Auf den Massenpunkt wirkt eine konstante Schwerebeschleunigung g in y -Richtung (siehe Skizze).



Geeignete generalisierte Koordinaten sind offensichtlich die Länge l des Gummibandes und der Winkel φ .

- (a)** Welcher Zusammenhang besteht zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) des Massenpunktes und den generalisierten Koordinaten (l, φ) ? Leiten Sie den Ausdruck für die kinetische Energie T ab, und zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Kräfte die Form haben:

$$Q_l = -k(l - l_0) + mg \cos \varphi$$

$$Q_\varphi = -mgl \sin \varphi$$

- (b)** Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des Problems und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.
- (c)** Geben Sie die generalisierten Impulse an. Welche physikalische Bedeutung haben sie und sind sie Erhaltungsgrößen?

Bitte wenden!

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m und der Ladung $q = -e$ (Elektron) bewege sich in einem homogenen, konstanten elektrischen Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$.

- (a) Zeigen Sie, dass $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -e\vec{r} \cdot \vec{E}t = -e\dot{z}E_0t$ ein verallgemeinertes Potential ist. Wie lautet die zugehörige verallgemeinerte Lagrangefunktion L ?
- (b) Zeigen Sie, dass durch eine geeignete Eichtransformation die Lagrangefunktion L aus Aufgabenteil (a) in eine äquivalente Lagrangefunktion $\tilde{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\vec{r} \cdot \vec{E}$ überführt werden kann.
- (c) Drücken Sie \tilde{L} in kartesischen und in Zylinderkoordinaten aus, wobei die Zylinderachse die z -Achse ist. Welche zyklischen Variablen gibt es in kartesischen, welche in Zylinderkoordinaten? Was sind die zugehörigen (erhaltenen) verallgemeinerten Impulse?

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m wird auf einem Kreis mit konstantem Radius r geführt. Dieser rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine in der Kreisebene liegende und durch den Mittelpunkt führende vertikale Achse. Als äußere Kraft wirkt die Schwerkraft. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf, bestimme die Gleichgewichtslagen und linearisiere die Bewegungsgleichungen in der Umgebung dieser. Was lässt sich über die Stabilität der Gleichgewichtslagen aussagen?

(Hinweis: Kleine Bewegungen um die Gleichgewichtslage sind stabil wenn es sich um Schwingungen mit beschränkter Amplitude handelt.)

