

III. Symmetrien

III.1. Symmetrien in der klassischen Mechanik

Noether Theorem:

Sind die Euler-Lagrangschen Bewegungsgleichungen invariant unter einer kontinuierlichen Koordinatentransformation $(t, \vec{r}) \rightarrow (t'(t), \vec{r}'(\vec{r}, t))$ so resultiert daraus die Existenz eines Integrals der Bewegung (Erhaltungsgröße)

(a) Homogenität des Raumes

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \stackrel{!}{=} L(\vec{r}_i + \vec{a}, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad \forall \vec{a}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \right)$$

mit Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} P_x = 0 \quad P_x = \text{const}$$

analog P_y, P_z

(b) Homogenität der Zeit

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \ddot{\vec{r}}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0$$

$$= \sum_i \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right)}_{\text{mit Euler-Lagrange}} \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \ddot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - L \right)}_H = 0 \quad H = \text{konst}$$

(c) Isohopie des Raumes

betrachten infinitesimale Rotationen

$$\delta \vec{\phi} = (\delta \phi_x, \delta \phi_y, \delta \phi_z)$$

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i$$

$$\delta \vec{v}_i = \delta \vec{\phi} \times \vec{v}_i$$

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta \vec{v}_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

kanon. Impulse $\vec{\pi}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$ $\frac{d}{dt} \vec{\pi}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta L &= \sum_i \left[\dot{\vec{\pi}}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{\pi}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \right] = 0 \\ &= \delta \vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{\pi}_i)}_{\vec{L}} \quad \vec{L} = \text{konst} \end{aligned}$$

alle oben betrachteten Transformationen bilden kontinuierliche verbundene Gruppen

zur Erinnerung: Gruppe

Def: Elemente $\{a, b, c, \dots\}$ einer Menge bilden Gruppe G falls Verknüpfung, genannt Multiplikation existiert mit

- (i) $a, b \in G \quad a \cdot b \in G$
- (ii) $\exists e : \quad a \cdot e = a = e \cdot a$
- (iii) $\forall a \exists a^{-1}$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
- (iv) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Def: Eine Gruppe heißt abelsch falls

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$$

Def: Eine Gruppe heißt kontinuierlich, falls die Elemente durch ein oder mehrere kontinuierl. Parameter charakterisiert werden können.

Def: Eine Gruppe heißt kontinuierlich verbunden, falls eine kontinuierliche Veränderung der Parameter von einem Element zu allen anderen führt

Def: Eine Gruppe heißt kompakt, falls in jeder unendlichen Folge eine unendliche Teilfolge $\{a_n\}$ existiert die gegen einen Grenzwert a konvergiert der Element der Gruppe ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in G$$

Def: Zwei Gruppen heißen isomorph wenn eine ein-einde-Zuordnung

$$\{a, b, \dots\} \quad \text{in } G_1 \quad \longleftrightarrow \quad \{a', b', \dots\} \quad \text{in } G_2$$

existiert mit

$$a b \leftrightarrow a' b' \quad \text{etc.}$$

Def: Ist G_1 isomorph zu G_2 deren Elemente Matrizen sind, so heißt G_2 Matrixdarstellung von G_1

III. 2. Symmetrien in der Quantenmechanik, Allgemeines

Was passiert mit q.m. Wellenfunktion bei Koordinatentransformationen, speziell Translationen?

aktive Interpretation: KS konstant, Wellenfunktion wird verschoben

$$\vec{r}' \xleftarrow{\vec{a}} \vec{r} \quad \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

(A)

(B)

$$\psi_A(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \psi_B(\vec{r}') = \psi_B(\vec{r} + \vec{a})$$

räumliche Verschiebung erhält Norm $\Rightarrow$ unitäre Operation?

$$\psi_B(\vec{r}) = U(\vec{a}) \psi_A(\vec{r}) = \psi_A(\vec{r} - \vec{a})$$

$$= \psi_A(\vec{r}) - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi_A(\vec{r}) + \dots \quad \text{Taylor}$$

$$U(\vec{a}) = e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} = e^{-i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar}}$$

siehe auch
a.h.I

man sieht

$$\boxed{U(\vec{a}) U(\vec{b}) = e^{-i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar}} e^{-i \frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{\hbar}} = e^{-i \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p}}{\hbar}} = U(\vec{a} + \vec{b})}$$

d.h. $\{\vec{a}\} \longleftrightarrow \{U(\vec{a})\}$ ist Gruppenisomorphismus

$\hat{U}$ ist unitär

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$$

Bewegungsgleichung von obenem Zustand

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_A(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi_A(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_B(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{a}) \psi_A(\vec{r}, t)$$

$$= U(\vec{a}) \hat{H} \psi_A(\vec{r}, t) = U(\vec{a}) \hat{H} U^{-1}(\vec{a}) \psi_B(\vec{r}, t)$$

$$\boxed{\hat{H}_B = \hat{U}(\vec{a}) \hat{H} \hat{U}^{-1}(\vec{a})}$$

Invarianz der Bewegungsgleichung erfordert

$$\boxed{[\hat{H}, \hat{U}(\vec{a})] \stackrel{!}{=} 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{hier}}{[\hat{H}, \vec{p}] = 0}$$

Def: Eine Transformationsgruppe heißt Symmetriegruppe wenn die zugehörige unitäre Darstellung $\hat{U}$ mit dem Hamiltonoperator kommutiert. Die Gruppe muß nicht kontinuierlich sein.

Symmetrien und Entartung von Eigenwerten von $\hat{H}$

sei $|\phi_E\rangle$ Eigenzustand von $\hat{H}$ zum Eigenwert E
ist $\hat{U}$ Element einer Symmetriegruppe gilt

$$|\phi'_E\rangle = \hat{U} |\phi_E\rangle \text{ ist ebenfalls Eigenzustand}$$

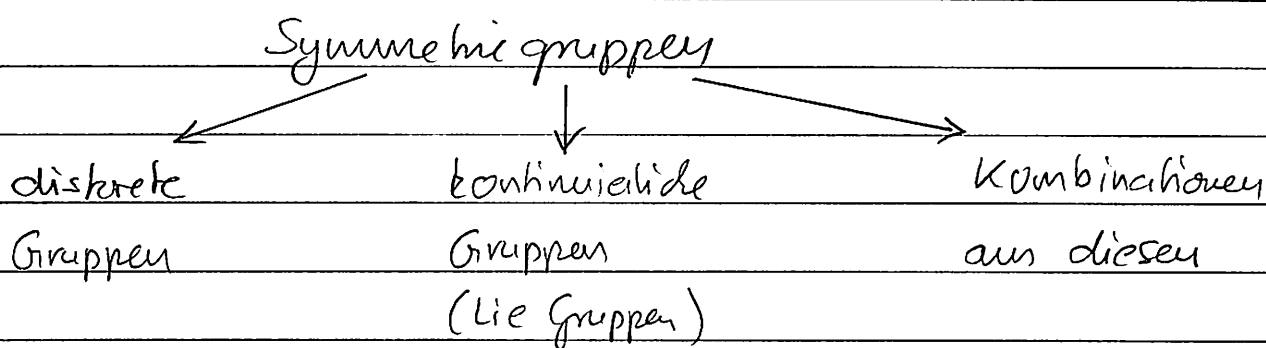
von $\hat{H}$ zu E

$$\hat{H} |\phi_E'\rangle = \hat{H} \hat{U} |\phi_E\rangle = \hat{U} \hat{H} |\phi_E\rangle = E \hat{U} |\phi_E\rangle$$

Falls zwei unitäre Operatoren $\hat{U}_1, \hat{U}_2$ existieren mit

$$[\hat{U}_1, \hat{U}_2] \neq 0 \quad [\hat{U}_1, \hat{H}] = [\hat{U}_2, \hat{H}] = 0$$

dann existieren linear unabh. Eigenvektoren $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ die EZ von $\hat{H}$ sind $\Rightarrow$ Entartung



Lie - Gruppen

Def: kont. Gruppen deren Elemente unitäre Operatoren $\hat{U}(a_1, \dots, a_n)$ sind die analytisch von n Parametern $a_1, \dots, a_n$ abhängen. Die Elemente eindeutig festlegen heißen Lie Gruppen

es ist $\hat{U}(0) \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$

Def: Die n Größen

$$\hat{L}_\mu = i \left. \frac{\partial \hat{U}(a_i)}{\partial a_\mu} \right|_{\vec{a}=0}$$

heißen Generatoren der Lie Gruppe

infinitesimale Transformation in der Nähe der Identität

$$\begin{aligned}\hat{U}(\delta\alpha_\mu) &= \hat{U}(0) + \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial \alpha_\mu} \right|_{\vec{\alpha}=0} \delta\alpha_\mu \\ &= \mathbb{1} - i \hat{L}_\mu \delta\alpha_\mu\end{aligned}$$

endliche Transformation $\Delta\alpha_\mu = N \delta\alpha_\mu$

$$\hat{U}(\Delta\alpha_\mu) = [\hat{U}(\delta\alpha_\mu)]^N = \left[\mathbb{1} - i \hat{L}_\mu \frac{\Delta\alpha_\mu}{N} \right]^N$$

lim $N \rightarrow \infty$

$$\boxed{\hat{U}(\Delta\alpha_\mu) = e^{-i \hat{L}_\mu \Delta\alpha_\mu}}$$

für reelle Parameter α_μ folgt

$$\hat{L}_\mu^\dagger = \hat{L}_\mu$$

Betrachten $U^{-1}(\{\delta\alpha_\mu\})$ in 2. Ordnung in $\delta\alpha_\mu$

$$U^{-1}(\{\delta\alpha_\mu\}) = \mathbb{1} + i \sum_\mu \hat{L}_\mu \delta\alpha_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \hat{L}_\mu \hat{L}_\nu \delta\alpha_\mu \delta\alpha_\nu$$

$$U^{-1}(\delta\beta_\mu) U^{-1}(\delta\alpha_\mu) \hat{U}(\delta\beta_\mu) \hat{U}(\delta\alpha_\mu) =$$

$$\begin{aligned}&= \left(1 + i \delta\beta_\mu \hat{L}_\mu - \frac{1}{2} \delta\beta_\nu \delta\beta_\lambda \hat{L}_\nu \hat{L}_\lambda \right) \left(1 + i \delta\alpha_\epsilon \hat{L}_\epsilon - \frac{1}{2} \delta\alpha_\gamma \delta\alpha_\delta \hat{L}_\gamma \hat{L}_\delta \right) \\ &\cdot \left(1 - i \delta\beta_\epsilon \hat{L}_\epsilon - \frac{1}{2} \delta\beta_\omega \delta\beta_\varphi \hat{L}_\omega \hat{L}_\varphi \right) \left(1 - i \delta\alpha_\eta \hat{L}_\eta - \frac{1}{2} \delta\alpha_\tau \delta\alpha_\varsigma \hat{L}_\tau \hat{L}_\varsigma \right)\end{aligned}$$

$$= \dots = 1 + \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu (\hat{L}_\mu \hat{L}_\nu - \hat{L}_\nu \hat{L}_\mu)$$

muß wieder
Generator sein

$$\Rightarrow \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu (\hat{L}_\mu \hat{L}_\nu - \hat{L}_\nu \hat{L}_\mu) = -i \delta g_{12} \hat{L}_2$$

schem $-i \delta g_{12} = C_{\mu\nu} \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu$

$$\boxed{[\hat{L}_\mu, \hat{L}_\nu] = C_{\mu\nu\lambda} \hat{L}_\lambda}$$

Lie Algebra

Die $C_{\mu\nu\lambda}$ heißen Strukturfaktoren

Die Lie-Algebra ist geschlossen unter Kommutation.

Jakobi Identität (leicht nachzuprüfen)

$$[[\hat{L}_i, \hat{L}_j], \hat{L}_k] + [[\hat{L}_j, \hat{L}_k], \hat{L}_i] + [[\hat{L}_k, \hat{L}_i], \hat{L}_j] = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{C_{ijm} C_{mkn} + C_{jkm} C_{min} + C_{kim} C_{mjn} = 0}$$

Def: Die Anzahl der untereinander kommutierenden Generatoren einer Lie Gruppe heißt Rang der Gruppe

Bspl: • Translationsgruppe in $\mathbb{R}^3$ ist vom Rang 3
da $[p_x, p_y] = [p_x, p_z] = [p_y, p_z] = 0$

• Rotationsgruppe ist vom Rang 1

• Halbeinfache Lie Gruppen, Normalteiler

Gruppe $G : \{g_r\}$

$g_r^+ = g_r^{-1}$ unitärer Op.

Untergruppe $A : \{a_i\}$

Def: A heißt Normalteiler von G , falls

$$\forall g_r \in G, a_i \in A \quad g_r a_i g_r^{-1} = a_j$$

A heißt abelscher Normalteiler falls zusätzlich

$$a_i a_j = a_j a_i \quad \forall a_i, a_j \in A$$

Bspl: Translations-Rotationsgruppe

Generatoren: $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$

Translation ist abelscher Normalteiler

$$R T R^{-1} = T'$$

Def: Eine Lie Gruppe heißt einfach wenn sie
keinen kontinuierlichen (d.h. Lieschen)
Normalteiler besitzt; sie heißt halbeinfach
 falls sie keinen abelschen kontinuierlichen
Normalteiler besitzt

obige Definitionen haben ihr Pendant auf der Ebene
 der Lie Algebra:

Seien $\hat{G}_k$ Generatoren von G
 $\hat{A}_e$ Generatoren von A

Dann ist A Untergruppe von G

$[\hat{A}_e, \hat{A}_m] = c_{emn} \hat{A}_n \Rightarrow$ Die Generatoren $\hat{A}_e$ einer
 Untergruppe bilden eine
Unteralgebra

Dann ist A Normalteiler von G unß

$$g_v a_i g_v^{-1} = a_j \in A$$

$$\text{d.h. } g_v a_i g_v^{-1} a_i^{-1} = a_j a_i^{-1} = a_m \in A$$

$$g_v = 1 - i \delta \alpha_i \hat{G}_i - \frac{1}{2} \delta \alpha_i \delta \alpha_j \hat{G}_i \hat{G}_j$$

$$a_i = 1 - i \delta \beta_k \hat{A}_k - \frac{1}{2} \delta \beta_k \delta \beta_e \hat{A}_k \hat{A}_e$$

analog zur Rechnung bei Ableitung der Strukturkonstanten

$$a_m = 1 - i \delta g_m \hat{A}_m$$

$$\Rightarrow [\hat{G}_i, \hat{A}_k] = a_{ikm} \hat{A}_m$$

Def: Eine Unteralgebra $\{\hat{A}_k\}$ einer Algebra $\{\hat{G}_e\}$ heißt Ideal wenn gilt $\forall \hat{A}_k, \hat{G}_i$

$$[\hat{G}_i, \hat{A}_k] = a_{ikm} \hat{A}_m$$

Def: Eine Lie-Algebra $\{\hat{G}_e\}$ heißt einfach, wenn sie kein Ideal außer dem Null-Ideal $\{0\}$ besitzt. Sie heißt halbeinfach wenn sie kein abelsches Ideal besitzt.

Satz: (Cartan)

Seien C_{ij} die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra. Die Lie-Algebra ist dann und nur dann halbeinfach falls

$$\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$$

wobei $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \equiv C_{\alpha\mu\nu} C_{\beta\mu\nu}$

Bspl:

$SO(3)$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

$$g_{\alpha\beta} = i \epsilon_{\alpha\mu\nu} i \epsilon_{\beta\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu\nu}$$

$$= 2 \delta_{\alpha\beta}$$

$$\det g_{\alpha\beta} = 8$$

Invariante Operatoren (Casimir Operatoren)

Theorem von Racah:

Für jede halbeinfache Lie Gruppe vom Rang l existieren l invariante Operatoren, oder Casimir Operatoren $\hat{C}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots, l$. Diese sind Funktionen der Generatoren und kommutieren mit jedem Operator der Gruppe.

Bspl:

$SO(3)$, halbeinfach Rang 1
 $\Rightarrow \exists 1$ Casimiroperator: $\hat{L}^2$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$$

Ist eine Lie-Gruppe eine Symmetriegruppe eines q.m. Systems so charakterisieren die Eigenwerte der Casimir-Operatoren Multiplikts. Die zugehörigen Eigenzustände spannen einen invarianten Unterraum auf, d.h. einen Unterraum der durch unitäre Gruppenoperationen nicht verlassen wird.

Bspl: $Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}$ 4-dim. Unterraum
bzgl. Rotationsgruppe

$$\hat{L} \pm Y_{em} = (\hat{L}_x \pm i \hat{L}_y) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{em \pm 1}$$

$$G = \{Y_{00}\} \oplus \{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\} \quad -162-$$

am Beispiel des Unterraumes $(Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}) = A$ haben wir gesehen, daß eine Zerlegung ...

$$A = \{Y_{00}\} \oplus \{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$$

nach invarianten Unterräumen möglich ist

$\{Y_{00}\}$ ist ein eindimensionaler invarianter Unterraum,

$\{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$ ist ein dreidim. invarianter Unterraum,

Die Elemente $\hat{U}(\alpha_\mu) = e^{-i\hat{L}_\mu \alpha_\mu}$ der Li Gruppe der Rotationen lassen sich durch Matrizen auf den invarianten Unterräumen darstellen

$$\hat{U}(\alpha_\mu) \leftrightarrow \begin{pmatrix} U_0 & & & \\ & U_{-11} & U_{-10} & U_{-1-1} \\ & U_{0-1} & U_{00} & U_{01} \\ & U_{1-1} & U_{10} & U_{11} \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

Def: Ist $\hat{U}$ eine kontr. Gruppe (Li Gruppe) unitärer Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ so heißt die Matrixdarstellung von $\hat{U}$ auf $\mathcal{H}$ reduzibel falls invariante Unterräume von $\mathcal{H}$ existieren. Andernfalls heißt die Matrixdarstellung irreduzibel

Der Hamiltonoperator ist auf dem Multipl. entartet

Bew: Sei $|\psi_0\rangle$ Element eines Multipl. mit

$$H|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle$$

$\hat{U}(\alpha)|\psi_0\rangle$ wieder Element des Multipl.

$$\hat{H}\hat{U}|\psi_0\rangle = \hat{U}\hat{H}|\psi_0\rangle = E\hat{U}|\psi_0\rangle \quad \square$$

Bem: $\nexists$ allgemeine Vorschrift zur Konstruktion von Casimiroperatoren

Für $SU(n)$ gilt, daß Casimiroperatoren einfache homogene Polynome in den Generatoren sind

Satz: Jeder Operator $\hat{A}$ der mit allen Operatoren einer Lie Gruppe (also mit allen Generatoren $\hat{L}_\mu$) kommutiert ist eine Funktion der Casimir-Operatoren der Gruppe

$\Rightarrow$ ist Lie Gruppe Symmetriegruppe $\Rightarrow H$ ist Funktion der Casimir-Operatoren

Bsp1: translationsinvariantes System, Rang 3
Casimir-Operator $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

$$\hat{H} = \alpha + \vec{\beta} \cdot \hat{\vec{p}} + \gamma \hat{\vec{p}}^2 + \dots$$

Mit Zeitumkehrinvarianz $\hat{H} \rightarrow \hat{H}$
 $\hat{\vec{p}} \rightarrow -\hat{\vec{p}}$

nur gerade Potenzen

$$\hat{H} = \alpha + \gamma \hat{\vec{p}}^2$$

einige wichtige Gruppen

Gruppe	Generatoren	Rang	Casimir-Op.	Typ
Translation	$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$	3	$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$	abelsch
Rotation	$\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$	1	$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$	einfach $\Rightarrow$ halbeinfach
euklidische Gruppe Transl. + Rot.	$\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$	3	$\hat{\vec{p}}^2, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{L}}$	weder einfach noch halbeinfach (Poincaré Theorem gilt nicht!)
Inversion	$\hat{p}$	1	$\hat{p}$	diskret