Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und im OLAT Kurs hochzuladen.

Aufgabe 31. *(6 Punkte)*
Die Gibbsche Fundamentalrelation für eine magnetische Substanz lautet

$$dU = TdS + \vec{B} \cdot d\vec{M}, \tag{1}$$

wobei $\vec{B}$ die magnetische Feldstärke und $\vec{M}$ die Magnetisierung der Substanz bedeuten. Hierbei wird angenommen, dass das Volumen der Substanz festgehalten ist (Festkörper). Nun seien

$$C_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X, \qquad X \in \{\vec{B}, \vec{M}\} \tag{2}$$

die spezifischen Wärmen sowie

$$\chi_X = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \vec{B}}\right)_X, \qquad X \in \{S, T\} \tag{3}$$

die isotherme bzw. isentrope magnetische Suszeptibilität. Unter der Annahme einer isotropen Substanz zeige man die nachfolgenden Relationen zwischen den spezifischen Wärmen und Suszeptibilitäten:

$$C_{\vec{B}} - C_{\vec{M}} = VT\alpha_B^2/\chi_T \tag{4}$$

$$\chi_T - \chi_S = VT\alpha_B^2/C_B \tag{5}$$

$$\frac{C_{\vec{B}}}{C_{\vec{M}}} = \frac{\chi_T}{\chi_S}, \tag{6}$$

wobei $\alpha_B \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathrm{B}}$ bedeutet.

Aufgabe 32. *(6 Punkte)*
Man betrachte nun einen paramagnetischen Stoff. Der Zusammenhang zwischen dem B-Feld und der Magnetisierung M wird durch das Curie-Gesetz beschrieben: $M = \gamma B/T$, wobei $\gamma =$ konst. Man gebe das Differential dA der magnetischen Gibbsfunktion A an, die definiert ist durch

$$A = A(T, V, H) = U - TS - BM \tag{7}$$

und zeige, dass

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{V,B} \tag{8}$$

gilt.

Bitte wenden!

Man beweise

$$A(T,V,B) = A_0(T,V) - \gamma\frac{B^2}{2T}, \tag{9}$$

wobei $A_0(T,V) = A(T,V,B=0)$ und leite daraus die Entropie $S(T,V,B)$ ab. Man zeige, dass der Druck nicht explizit vom Magnetfeld abhängt, d.h., dass gilt $p = p(V,T)$.

Aufgabe 33. Eindimensionales Ising-Modell.
Berechnen Sie die Zustandssumme Z_N für ein eindimensionales Ising-Modell mit N Spins mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i S_i S_{i+1}. \tag{10}$$

Hinweis: Zeigen Sie die Rekursionsrelation $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(J_N/k_BT)$.