Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und im OLAT Kurs hochzuladen.

☗ **Aufgabe 25.** Niedrig-Temperatur Entwicklung *(6 Punkte)*

Bei der Beschreibung von idealen Fermigasen bei niedriger Temperatur müssen Integrale der Form

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) n(\varepsilon) \tag{1}$$

ausgewertet werden, wobei $n(\varepsilon)$ die Fermiverteilung zur Energie ε ist. Für niedrige Temperaturen weicht $n(\varepsilon)$ nur wenig von der Sprungfunktion $\Theta(\mu - \varepsilon)$ ab. Daher kann man näherungsweise setzen

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) + \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) \left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu - \varepsilon) \right] & (2) \\ &\simeq \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) + \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) \left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu - \varepsilon) \right]. & (3) \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch die Reihenentwicklung von $f(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = \mu$, dass gilt

$$I = \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon \ f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} \left(k_\mathrm{B} T\right)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} \left(k_\mathrm{B} T\right)^4 f'''(\mu) + \ldots. \tag{4}$$

Leiten Sie damit, unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücke für das Großkanonische Potential und die Teilchenzahl, die Zustandsgleichungen des idealen Fermigases bei niedrigen Temperaturen ab ($T_F = \varepsilon_F / k_\mathrm{B}$)

$$\begin{aligned} \mu &= \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \ldots \right) & (5) \\ p &= \frac{2}{5} \frac{N}{V} \varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \ldots \right) & (6) \\ U &= \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \ldots \right) & (7) \end{aligned}$$

Was ist die Wäremekapazität des idealen Fermigases bei konstantem Volumen?

☗ **Aufgabe 26.** Phononengas I *(6 Punkte)*

Gitterschwingungen in einem Festkörper können durch eine Kette gekoppelter harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. In einer Dimension lautet die klassische Hamiltonfunktion

$$H = \sum_n \left(\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 + \frac{K}{2} \left(y_n - y_{n-1} \right)^2 \right), \tag{8}$$

wobei $y_n = x_n - x_n^0$ die Auslenkungen aus der Ruhelage x_n^0 bedeuten und $x_{n+1}^0 - x_n^0 = a$ die Gitterkonstante ist. Zeigen Sie, dass sich (8) auf eine Summe harmonischer Oszillatoren zurückführen lässt, die einem quantenmechanischem Hamiltonoperator

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

mit

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{ka}{2} \leq \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

entsprechen. Man nennt die Anregungen *akustische Phononen.*

Aufgabe 27. Phononengas II

Betrachten Sie erneut das Phononengas aus Aufgabe 26. Zeigen Sie, dass für niedrige Temperaturen gilt

$$E = E_0(V) + C_1 T^4 \qquad (\textit{Debye'sches Gesetz}), \tag{11}$$

d.h. $C_V \sim T^3$, sowie für hohe Temperaturen

$$E = E_0(V) + 3Nk_\mathrm{B}T \qquad (\textit{Dulong Petit'sche Regel}), \tag{12}$$

d.h. $C_V \sim 3Nk_\mathrm{B}$.
Hinweis: Benutzen Sie die formale Analogie zum Photonengas.