Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und im OLAT Kurs hochzuladen.

☗ **Aufgabe 13.** *(6 Punkte)*
Gegeben sind zwei Teilsysteme A und B mit jeweils vielen Mikrozuständen $|a\rangle, |b\rangle$ und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P_a, P_b. Die Entropie der Teilsysteme ist $S_A = -k\sum_a P_a \ln P_a$ und $S_B = -k\sum_b P_b \ln P_b$.

(a) Zeigen Sie, dass die Entropie additiv ist, d.h.,

$$S = -k\sum_{a,b} P_{ab} \ln P_{ab} = S_A + S_B, \tag{1}$$

wenn die Systeme unabhängig sind (d.h., wenn $P_{ab} = P_a P_b$).

(b) Wenn die Systeme nicht unabhängig voneinander sind, dann gilt $P_a = \sum_b P_{ab}$ und $P_b = \sum_a P_{ab}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$S - S_A - S_B = k\sum_{a,b} P_{ab} \ln \frac{P_a P_b}{P_{ab}}. \tag{2}$$

Ist der Entropieunterschied positiv oder negativ (mit Beweis)? Was bedeutet das für Systeme mit Wechselwirkungen?

☗ **Aufgabe 14.** *(6 Punkte)*
Betrachten Sie N harmonische Oszillatoren. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktsapproximation (siehe Materialsammlung) die mikrokanonische Zustandsdichte $\Omega(E)$ in führender Ordnung N.

Aufgabe 15.
Beweisen Sie die Stirlingsche Formel

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}, \tag{4}$$

indem Sie von $N! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^N e^{-x}$ ausgehen und den Integranden $f(x) \equiv x^N e^{-x}$ bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $g(x) = Ae^{-(x-N)^2/a^2}$ anpassen. $f(x)$ hat ein scharfes Maximum bei $x_0 = N$.