Klassischer Grenzfall idealer Quantengase ($z = e^{\mu\beta} \ll 1$)

Für hinreichend große Temperaturen $k_B T \gg \mu$ kann man erwarten, daß sich Quantengase wie klassische Gase verhalten. Um die Zustandsgleichung in diesem Grenzfall näherungsweise zu bestimmen, wollen wir zunächst Ausdrücke für die verallgemeinerte Zeta-Funktionen g_ν, f_ν für kleine z ableiten:

$$\left.\begin{matrix} g_\nu(z) \\ f_\nu(z) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} \mp 1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} e^{-x} z \sum_{l=0}^\infty (\pm 1)^l e^{-xl} z^l$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{l=0}^\infty \left[\int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} e^{-x(l+1)}\right] (\pm 1)^l z^{l+1}.$$

Nun gilt mit $y = x(l+1)$

$$\int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} e^{-x(l+1)} = \frac{1}{(1+l)^\nu} \int_0^\infty dy\, y^{\nu-1} e^{-y} = \frac{\Gamma(\nu)}{(1+l)^\nu}$$

Damit findet man

(1) $$\left.\begin{matrix} g_\nu(z) \\ f_\nu(z) \end{matrix}\right\} = \sum_{l=0}^\infty (\pm 1)^l z^{l+1} \frac{1}{(1+l)^\nu} = \sum_{l=1}^\infty (\pm 1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu}$$

Berücksichtigung von Termen bis zur zweiten Ordnung in z liefert einen **Zusammenhang zwischen Teilchendichte und Fugazität** $z = e^{\beta\mu}$ **bzw. chemischen Potential** μ

(2) $$\frac{N}{V} = \frac{2s+1}{\lambda^3} \left\{ \begin{matrix} g_{3/2}(z) \\ f_{3/2}(z) \end{matrix} \right\} = \frac{2s+1}{\lambda^3} \left(z \pm \frac{z^2}{2^{3/2}} + \mathcal{O}\left(z^3\right) \right)$$

Unter Berücksichtigung von $z \ll 1$ können wir diese Relation iterativ nach z auflösen. In niedrigster Ordnung ergibt sich

$$z^{(0)} = \frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V}$$

In nächster Ordnung ergibt sich somit der Zusammenhang zwischen Fugazität und Teilchenzahl

$$z = \frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V} \mp \frac{1}{2^{3/2}} \left(z^{(0)}\right)^2 + \cdots$$

$$\approx \frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V} \mp \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^2$$

Auflösen nach dem chemischen Potential und Entwicklung des Logarithmus liefert

$$\mu = k_B T \ln z = k_B T \left[\ln\left(\frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V} \right) \mp \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{2s+1} \frac{N}{V} + \cdots \right]$$

Analog zu Gleichung(2) kann man verfahren um das **großkanonische Potential** Φ mit Gl.(1) zu bestimmen

$$\Phi = -\frac{2s+1}{\lambda^3} V k_B T \left\{ \begin{array}{c} g_{5/2}(z) \\ f_{5/2}(z) \end{array} \right\} = -\frac{2s+1}{\lambda^3} V k_B T \left(z \pm \frac{z^2}{2^{5/2}} + \mathcal{O}(z^3) \right)$$

Dies liefert schließlich die **thermische Zustandsgleichung eines idealen Quantengases im quasi-klassischen Grenzfall**

$$\boxed{pV = -\Phi = N k_B T \left(1 \mp \frac{\lambda^3}{2^{5/2}(2s+1)} \frac{N}{V} + \cdots \right)}$$

Der erste Term ist der Beitrag des klassischen idealen Gases. Der zweite Term beschreibt die **Quantenkorrekturen zum Druck**:

- Bosonen: Verringerung des Druckes (effektive Anziehung)
- Fermionen: Erhöhung des Druckes (effektive Abstoßung)