

Allgemeine Hinweise: Die mit **►** gekennzeichnete Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und über OLAT hochzuladen

**► Aufgabe 28. (6 Punkte)**

Betrachten Sie  $N$  nicht wechselwirkende, quantisierte Drehimpulse  $\hat{J}_n$  mit  $\hat{J}^2 = J(J+1)$  und magnetischem Moment  $\mu$  in einem Magnetfeld  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  bei einer Temperatur  $T$ . Der Hamiltonoperator ist

$$H = -\mu B \sum_{n=1}^N \hat{j}_z \quad (1)$$

- (a) Die kanonische Zustandssumme kann in der Form  $Z = Z_{\text{mag}}^N$  geschrieben werden, wobei nur die magnetische Energie berücksichtigt werden soll. Zeigen Sie

$$Z_{\text{mag}} = \frac{\sinh\left[\eta \frac{2J+1}{2}\right]}{\sinh[\eta/2]}, \quad (2)$$

wobei  $\eta = \mu B / k_B T$  ist.

- (b) Bestimmen Sie den magnetischen Anteil der freien Energie  $F = -k_B T \ln Z$  und daraus die Magnetisierung

$$m_z = -\frac{\partial F}{\partial B} \quad (3)$$

**► Aufgabe 29. (6 Punkte)**

Gegeben sei ein van-der-Waals Gas mit der thermischen Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T. \quad (4)$$

Berechnen Sie den Joule-Thomson-Koeffizienten  $\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ .

Die Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad (5)$$

definiert die sog. Inversionskurve  $p = p(v)$ . Ab welcher Temperatur  $T_{\text{inv}}$  ist der Joule-Thomson-Koeffizient stets negativ?

**► Aufgabe 30. (6 Punkte)**

Die Gibbsche Fundamentalrelation für eine magnetische Substanz lautet

$$dU = T dS + \vec{B} \cdot d\vec{M}, \quad (6)$$

wobei  $\vec{B}$  die magnetische Feldstärke und  $\vec{M}$  die Magnetisierung der Substanz bedeuten. Hierbei wird angenommen, dass das Volumen der Substanz festgehalten ist (Festkörper). Nun seien

$$C_X = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_X, \quad X \in \{\vec{B}, \vec{M}\} \quad (7)$$

die spezifischen Wärmen sowie

$$\chi_x = \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial \vec{B}} \right)_X, \quad X \in \{S, T\} \quad (8)$$

die isotherme bzw. isentrope magnetische Suszeptibilität. Unter der Annahme einer isotropen Substanz zeige man die nachfolgenden Relationen zwischen den spezifischen Wärmen und Suszeptibilitäten:

$$C_{\vec{B}} - C_{\vec{M}} = VT\alpha_B^2/\chi_T \quad (9)$$

$$\chi_T - \chi_S = VT\alpha_B^2/C_B \quad (10)$$

$$\frac{C_{\vec{B}}}{C_{\vec{M}}} = \frac{\chi_T}{\chi_S}, \quad (11)$$

wobei  $\alpha_B \equiv \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_B$  bedeutet.