Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichnete Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und über OLAT hochzuladen

☗ **Aufgabe 28.** *(6 Punkte)*
Betrachten Sie N nicht wechselwirkende, quantisierte Drehimpulse $\hat{\vec{J}}_n$ mit $\hat{J}^2 = J(J+1)$ und magnetischem Moment μ in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$ bei einer Temperatur T. Der Hamilton-operator ist

$$H = -\mu B \sum_{n=1}^{N} \hat{j}_z \tag{1}$$

(a) Die kanonische Zustandssumme kann in der Form $Z = Z_{\text{mag}}^N$ geschrieben werden, wobei nur die magnetische Energie berücksichtigt werden soll. Zeigen Sie

$$Z_{\text{mag}} = \frac{\sinh\left[\eta\frac{2J+1}{2}\right]}{\sinh[\eta/2]}, \tag{2}$$

wobei $\eta = \mu B/k_B T$ ist.

(b) Bestimmen Sie den magnetischen Anteil der freien Energie $F = -k_B T \ln Z$ und daraus die Magnetisierung

$$m_z = -\frac{\partial F}{\partial B} \tag{3}$$

☗ **Aufgabe 29.** *(6 Punkte)*
Gegeben sei ein van-der-Waals Gas mit der thermischen Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = k_B T. \tag{4}$$

Berechnen Sie den Joule-Thomson-Koeffizienten $\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\text{H}}$.
Die Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{T} \tag{5}$$

definiert die sog. Inversionskurve $p = p(v)$. Ab welcher Temperatur T_{inv} ist der Joule-Thomson-Koeffizient stets negativ?

☗ **Aufgabe 30.** *(6 Punkte)*
Die Gibbsche Fundamentalrelation für eine magnetische Substanz lautet

$$dU = TdS + \vec{B}\cdot d\vec{M}, \tag{6}$$

wobei $\vec{B}$ die magnetische Feldstärke und $\vec{M}$ die Magnetisierung der Substanz bedeuten. Hierbei wird angenommen, dass das Volumen der Substanz festgehalten ist (Festkörper). Nun seien

$$C_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X, \qquad X \in \{\vec{B}, \vec{M}\} \tag{7}$$

die spezifischen Wärmen sowie

$$\chi_X = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \vec{B}}\right)_X, \qquad X \in \{S, T\} \tag{8}$$

die isotherme bzw. isentrope magnetische Suszeptibilität. Unter der Annahme einer isotropen Substanz zeige man die nachfolgenden Relationen zwischen den spezifischen Wärmen und Suszeptibilitäten:

$$C_{\vec{B}} - C_{\vec{M}} = VT\alpha_B^2/\chi_T \tag{9}$$

$$\chi_T - \chi_S = VT\alpha_B^2/C_B \tag{10}$$

$$\frac{C_{\vec{B}}}{C_{\vec{M}}} = \frac{\chi_T}{\chi_S}, \tag{11}$$

wobei $\alpha_B \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathrm{B}}$ bedeutet.