

Allgemeine Hinweise: Die mit ♣ gekennzeichnete Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und über OLAT hochzuladen

♣ **Aufgabe 25.** Phononengas I (6 Punkte)

Gitterschwingungen in einem Festkörper können durch eine Kette gekoppelter harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. In einer Dimension lautet die klassische Hamiltonfunktion

$$H = \sum_n \left(\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 + \frac{K}{2} (y_n - y_{n-1})^2 \right), \quad (1)$$

wobei $y_n = x_n - x_n^0$ die Auslenkungen aus der Ruhelage x_n^0 bedeuten und $x_{n+1}^0 - x_n^0 = a$ die Gitterkonstante ist. Zeigen Sie, dass sich (1) auf eine Summe harmonischer Oszillatoren zurückführen lässt, die einem quantenmechanischen Hamiltonoperator

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

mit

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{ka}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

entsprechen. Man nennt die Anregungen *akustische Phononen*.

Aufgabe 26. Phononengas II

Betrachten Sie erneut das Phononengas aus Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass für niedrige Temperaturen gilt

$$E = E_0(V) + C_1 T^4 \quad (\text{Debye'sches Gesetz}), \quad (4)$$

d.h. $C_V \sim T^3$, sowie für hohe Temperaturen

$$E = E_0(V) + 3Nk_B T \quad (\text{Dulong Petit'sche Regel}), \quad (5)$$

d.h. $C_V \sim 3Nk_B$.

Hinweis: Benutzen Sie die formale Analogie zum Photonengas.

♣ **Aufgabe 27.** (6 Punkte)

Gegeben sei ein würfelförmiges Volumen $V = L^3$ mit einem klassischen idealen Gas aus N identischen Atomen. Nun werde zusätzlich angenommen, dass die Teilchen einen inneren Freiheitsgrad (Spin $S = 1/2$) haben, verbunden mit einem magnetischen Moment μ . Es werde ein magnetisches Feld B angelegt.

(a) Begründen Sie mit wenigen Worten, warum die kanonische Zustandssumme die Form

$$Z_N = \frac{1}{N!} (Z_{1,\text{trans}})^N (Z_{1,\text{int}})^N \quad (6)$$

hat, wobei $Z_{1,\text{trans}}$ den translatorischen und $Z_{1,\text{int}}$ den internen Anteil der Zustandssumme bezeichnet. Warum taucht der Faktor $1/N!$ auf?

- (b)** Berechnen Sie Z_N .
- (c)** Berechnen Sie die innere Energie U und die Wärmekapazität C_V .
- (d)** Berechnen Sie die Magnetisierung M .