Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichnete Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und über OLAT hochzuladen

☗ **Aufgabe 19.** *(6 Punkte)*
Die Moleküle eines zweiatomigen Gases besitzen die gequantelten Rotationsniveaus

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1) \tag{1}$$

wobei $r = 0, 1, 2, \dots$. I ist dabei das (konstante) Trägheitsmoment des Moleküls und das Niveau E_r ist $(2r+1)$-fach entartet.

(a) Geben Sie einen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme Z_{rot} der Rotationsbewegung an. *Hinweis:* Die Zustandssumme ist eine Spur über alle Zustände, d.h., der Entartungsgrad muss berücksichtigt werden.

(b) Leiten Sie daraus den Rotationsbeitrag zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_{rot} für sehr hohe und sehr niedrige Temperaturen ab.

☗ **Aufgabe 20.** *(8 Punkte)*

Ein harmonischer Oszillator hat die Energien

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie im Grenzfall unendlich vieler nicht entarteter Zustände die kanonische Zustandssumme Z, die innere Energie U, sowie die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

(b) Im Falle einer kleinen Anharmonizität ergibt sich ein zusätzlicher kleiner quadratischer Term im Ausdruck für die Energien

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \gamma\hbar\omega\, n^2, \tag{3}$$

wobei γ ein kleiner Parameter ist. Berechnen Sie die Zustandssumme Z, wobei nur die in γ linearen Anteile berücksichtigt werden sollen. Bestimmen Sie hieraus die freie Energie F wiederum nur in linearer Näherung in γ. (*Hinweis:* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\alpha n} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha n}$)

(c) Entwickeln Sie den Ausdruck für die freie Energie aus (b) für tiefe Temperaturen und berücksichtigen Sie nur Terme der Ordnung $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$. Berechnen Sie in dieser Näherung die Entropie S und die spezifische Wärme C und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus Aufgabe (a).

Aufgabe 21.
Gegeben sei ein würfelförmiges Volumen $V = L^3$ mit einem klassischen idealen Gas aus N identischen Atomen. Nun werde zusätzlich angenommen, dass die Teilchen einen inneren Freiheitsgrad (Spin $S = 1/2$) haben, verbunden mit einem magnetischen Moment μ. Es werde ein magnetisches Feld B angelegt.

(a) Begründen Sie mit wenigen Worten, warum die kanonische Zustandssumme die Form

$$Z_N = \frac{1}{N!}(Z_{1,\mathrm{trans}})^N (Z_{1,\mathrm{int}})^N \tag{4}$$

hat, wobei $Z_{1,\mathrm{trans}}$ den translatorischen und $Z_{1,\mathrm{int}}$ den internen Anteil der Zustandssumme bezeichnet. Warum taucht der Faktor $1/N!$ auf?

(b) Berechnen Sie Z_N.

(c) Berechnen Sie die innere Energie U und die Wärmekapazität C_V.

(d) Berechnen Sie die Magnetisierung M.