Allgemeine Hinweise: Aufgaben 23 und 24 sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 23. Wigner-Jordan Transformation
Betrachten Sie ein eindimensionales System von N Spin-1/2 Teilchen. Dieses kann durch Paulimatrizen σ_j^x, σ_j^y, σ_j^z mit $j = 1, 2, \ldots, N$ beschrieben werden. Zeigen Sie, daß folgende Transformation eine Abbildung auf Fermionen erlaubt

$$\sigma_j^- = \exp\left(i\pi \sum_{l<j} c_l^\dagger c_l\right) c_j \qquad \sigma_j^+ = \exp\left(-i\pi \sum_{l<j} c_l^\dagger c_l\right) c_j^\dagger \tag{1}$$

beziehungsweise

$$c_j = \exp\left(-i\pi \sum_{l<j} \sigma_l^+ \sigma_l^-\right) \sigma_j^- \qquad c_j^\dagger = \exp\left(i\pi \sum_{l<j} \sigma_l^+ \sigma_l^-\right) \sigma_j^+ \tag{2}$$

Das heißt: Zeigen Sie, daß Spin- bzw. Fermionen Vertauschungsregeln gelten.

Aufgabe 24.
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die magnetische Suszeptibilität eines Ising-Ferromagneten in Molekularfeldnäherung durch die Selbstkonsistenzgleichung

$$\chi\left(\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}\right) = \frac{\beta \delta_{l,l'} + \beta \sum_{l''} I_{l,l''} \chi\left(\vec{r}_{l''} - \vec{r}_{l'}\right)}{\cosh^2 \beta \bar{I}_l m} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $I_{l,l'} = I\left(|\vec{r}_l - \vec{r}_l'|\right)$ und $\bar{I}_l = \sum_{l'} I_{l,l'}$ bedeuten.
Zeigen Sie, daß für große Abstände $|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|$ gilt

$$G_{l,l'} = k_{\mathrm{B}} T \chi\left(\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}\right) \propto \frac{\exp\left(-|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|/\xi\right)}{|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|} \tag{4}$$

mit der Korrelationslänge ξ. Bestimmen Sie zunächst eine Selbstkonsistenzgleichung für die Fouriertransformierte $\tilde{\chi}(\vec{q})$ von $\chi(\vec{r})$. Das Verhalten für große $|\vec{r}|$ bekommt man, indem man $\tilde{\chi}(\vec{q})$ zur zweiten Ordnung in $\vec{q}$ entwickelt und diesen Ausdruck rücktransformiert. Verifizieren sie das in der Vorlesung abgeleitete Resultat für die Korrelationslänge ξ.