Allgemeine Hinweise: Aufgaben 16 und 17 sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 16. Bosekondensation in 1D und 2D
Berechnen Sie die Teilchendichte in angeregten Zuständen eines homogenen, unendlich ausgedehnten idealen Bosegases bei gegebener Temperatur und chemischem Potential μ in einer (1D) und zwei (2D) räumlichen Dimensionen. Ist diese nach oben beschränkt? Was folgt daraus für die Möglichkeit einer Bose-Einstein-Kondensation in 1D und 2D?

Aufgabe 17. Phononengas
Gitterschwingungen in einem Festkörper können durch eine Kette gekoppelter harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. In einer Dimension lautet die klassische Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_n \left(\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 + \frac{K}{2} (y_n - y_{n-1})^2 \right), \tag{1}$$

wobei $y_n = x_n - x_n^0$ die Auslenkungen aus der Ruhelage x_n^0 bedeuten und $a = x_{n+1}^0 - x_n^0$ die Gitterkonstante ist. Zeigen Sie, dass sich (1) auf eine Summe harmonischer Oszillatoren zurückführen lässt, die einem quantenmechanischem Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \tag{2}$$

mit:

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{ka}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

entsprechen. Man nennt die Anregungen *akustische Phononen.*