Allgemeine Hinweise: Aufgaben 12 und 13 sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in die dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 12.

(a) Ein harmonischer Oszillator mit kleiner Anharmonizität hat die Energien

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma\hbar\omega\, n^2, \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

wobei γ ein kleiner Parameter ist. Berechnen Sie die Zustandssumme Z, wobei nur die in γ linearen Anteile berücksichtigt werden sollen. Bestimmen Sie hieraus die freie Energie F wiederum nur in linearer Näherung in γ.
(*Hinweis*: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\alpha n} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha n}$)

(b) Entwickeln Sie den Ausdruck für die freie Energie aus (a) für tiefe Temperaturen und berücksichtigen Sie nur Terme der Ordnung $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$. Berechnen Sie in dieser Näherung die Entropie S und die spezifische Wärme C_V und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen eines harmonischen Oszillators.

Aufgabe 13.

Bei der Beschreibung von idealen Fermigasen bei niedriger Temperatur müssen Integrale der Form

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon) n(\varepsilon) \tag{2}$$

ausgewertet werden, wobei $n(\varepsilon)$ die Fermiverteilung zur Energie ε ist. Für niedrige Temperaturen weicht $n(\varepsilon)$ nur wenig von der Sprungfunktion $\Theta(\mu - \varepsilon)$ ab. Daher kann man näherungsweise setzen

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon) + \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon)\left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu-\varepsilon)\right] &(3)\\ &\simeq \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon) + \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon)\left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu-\varepsilon)\right]. &(4)\end{aligned}$$

Zeigen Sie durch die Reihenentwicklung von $f(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = \mu$, dass gilt

$$I = \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\; f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}\left(k_\mathrm{B}T\right)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}\left(k_\mathrm{B}T\right)^4 f'''(\mu) + \ldots. \tag{5}$$

Leiten Sie damit, unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücke für das Großkanonische Potential und die Teilchenzahl, die Zustandsgleichungen des idealen Fermigases bei niedrigen Temperaturen ab ($T_F = \varepsilon_F / k_\mathrm{B}$):

$$\begin{aligned} \mu &= \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right], &(6)\\ p &= \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right], &(7)\\ U &= \frac{3}{5}N\varepsilon_F\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right]. &(8)\end{aligned}$$

Was ist die Wäremekapazität des idealen Fermigases bei konstantem Volumen?