Statistische Mechanik: Übungen **Prof. M. Fleischhauer** **SS 2016**

12. Übungsblatt Abgabe: 15.07.16, 12:00 Uhr

Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

☗ **Aufgabe 37.** (*6 Punkte*) Magnonen (Spinwellen) in Ferromagneten.
Der *Heisenberg-Hamilton-Operator*, der eine Beschreibung von bestimmten Ferromagneten leistet, ist durch

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{l,l'} J(|\vec{x}_l - \vec{x}_{l'}|)\vec{S}_l \cdot \vec{S}_{l'} \tag{1}$$

gegeben, wobei l und l' nächste Nachbarn in einem kubischen Gitter sind. Durch die *Holstein-Primakoff-Transformation*

$$S_l^+ = \sqrt{2S}\phi(n_l)a_l, \qquad S_l^- = \sqrt{2S}a_l^\dagger\phi(n_l), \qquad S_l^z = S - n_l \tag{2}$$

($S_l^\pm = S_l^x \pm iS_l^y$) mit $\phi(n_l) = \sqrt{1 - n_l/2S}$, $n_l = a_l^\dagger a_l$ und $[a_l, a_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'}$ sowie $[a_l, a_{l'}] = 0$ werden die Spin-Operatoren auf Bose-Operatoren transformiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Vertauschungsregeln für die Spinoperatoren erfüllt sind.

(b) Stellen Sie den Heisenberg-Operator bis in zweiter Ordnung (harmonische Näherung) durch die Bose-Operatoren a_l dar, indem Sie die Wurzel in der obigen Transformation in eine Taylor-Reihe entwickeln.

Aufgabe 38.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die magnetische Suszeptibilität eines Ising-Ferromagneten in Molekularfeldnäherung durch die Selbstkonsistenzgleichung

$$\chi(\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}) = \frac{\beta\delta_{l,l'} + \beta\sum_{l''} I_{l,l''}\chi(\vec{r}_{l''} - \vec{r}_{l'})}{\cosh^2 \beta\bar{I}m} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $I_{l,l'} = I(|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|)$ und $\bar{I} = \sum_{l'} I_{l,l'}$ bedeuten.
Zeigen Sie, dass für große Abstände $|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|$ gilt

$$G_{l,l'} = k_{\mathrm{B}}T\chi(\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}) \propto \frac{e^{-|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|/\xi}}{|\vec{r}_l - \vec{r}_{l'}|}, \tag{4}$$

mit der Korrelationslänge ξ. Bestimmen Sie zunächst eine Selbstkonsistenzgleichung für die Fouriertransformierte $\tilde{\chi}(\vec{q})$ von $\chi(\vec{r})$. Das Verhalten für große $|\vec{r}|$ bekommt man, indem man $\tilde{\chi}(\vec{q})$ bis zur zweiten Ordnung in $\vec{q}$ entwickelt und diesen Ausdruck rücktransformiert. Verifizieren Sie das in der Vorlesung abgeleitete Resultat für die Korrelationslänge ξ.