

Allgemeine Hinweise: Die mit \blacktriangle gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

▲ Aufgabe 34. Wigner-Jordan Transformation (6 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales System von N Spin-1/2 Teilchen. Dieses kann durch Paulimatrizen $\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$ mit $j = 1, 2, \dots, N$ beschrieben werden. Zeigen Sie, dass folgende Transformation eine Abbildung auf Fermionen erlaubt

$$\sigma_j^- = e^{i\pi \sum_{l < j} c_l^\dagger c_l} c_j \quad \sigma_j^+ = e^{-i\pi \sum_{l < j} c_l^\dagger c_l} c_j^\dagger,$$

beziehungsweise

$$c_j = e^{-i\pi \sum_{l < j} \sigma_l^+ \sigma_l^-} \sigma_j^- \quad c_j^\dagger = e^{i\pi \sum_{l < j} \sigma_l^+ \sigma_l^-} \sigma_j^+.$$

Das heißt: Zeigen Sie, dass Spin- beziehungsweise Fermionen-Vertauschungsregeln gelten.

▲ Aufgabe 35. (6 Punkte)

Im sogenannten Weiß-Modell wechselwirkt jedes der N Spin-1/2 Teilchen mit jedem gleich stark,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l, l'} J \sigma_l \sigma_{l'} - h \sum_l \sigma_l. \quad (1)$$

Dabei ist $J = \hat{J}/N$ und es bietet sich an $\sigma_j = \sigma_j^z$ zu wählen. Dieses Modell lässt sich exakt lösen! Zeigen Sie, dass das Ergebnis der Molekularfeldtheorie resultiert.

Aufgabe 36. Eindimensionales Ising-Modell.

Berechnen Sie die Zustandssumme Z_N für ein eindimensionales Ising-Modell mit N Spin-1/2 Teilchen mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = - \sum_{l=1}^{N-1} J_l \sigma_l \sigma_{l+1}. \quad (2)$$

Hinweis: Zeigen Sie die Rekursionsrelation $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(J_N/k_B T)$.