

Allgemeine Hinweise: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

♣ **Aufgabe 19.** (6 Punkte)

Gegeben sind zwei Teilsysteme  $A$  und  $B$  mit jeweils vielen Mikrozuständen  $|a\rangle, |b\rangle$  und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P_a, P_b$ . Die Entropie der Teilsysteme ist  $S_A = -k \sum_a P_a \ln P_a$  und  $S_B = -k \sum_b P_b \ln P_b$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Entropie additiv ist, d.h.,

$$S = -k \sum_{a,b} P_{ab} \ln P_{ab} = S_A + S_B, \quad (1)$$

wenn die Systeme unabhängig sind (d.h., wenn  $P_{ab} = P_a P_b$ ).

(b) Wenn die Systeme nicht unabhängig voneinander sind, dann gilt  $P_a = \sum_b P_{ab}$  und  $P_b = \sum_a P_{ab}$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$S - S_A - S_B = k \sum_{a,b} P_{ab} \ln \frac{P_a P_b}{P_{ab}}. \quad (2)$$

Ist der Entropieunterschied positiv oder negativ (mit Beweis)? Was bedeutet das für Systeme mit Wechselwirkungen?

♣ **Aufgabe 20.** (6 Punkte)

Betrachten Sie  $N$  harmonische Oszillatoren. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar \omega \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktsapproximation (siehe Materialsammlung) die mikrokanonische Zustandsdichte  $\Omega(E)$  in führender Ordnung  $N$ .

**Aufgabe 21.**

Die Schwingungsenergie eines zweiatomigen Moleküls ist gemäß

$$E_r = \hbar \omega \left( r + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

gequantelt, wobei  $r = 0, 1, 2, \dots$  ist, und die Niveaus nicht entartet sind.

- (a) Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandsdichte  $\Omega(E)$  sowie die kalorische Zustandsgleichung.
- (b) Leiten Sie daraus die Wärmekapazität  $C_{\text{vib}}$  ab und untersuchen Sie deren Grenzverhalten für niedrige und hohe Temperaturen.