Allgemeine Hinweise: Aufgaben 35 und 36 sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 34. Eindimensionales Ising-Modell.
Berechnen Sie die Zustandssumme Z_N für ein eindimensionales Ising-Modell mit N Spins mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i S_i S_{i+1}. \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie die Rekursionsrelation $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(J_N/k_B T)$.

Aufgabe 35. (*6 Punkte*)
Im sogenannten Weiß-Modell wechselwirkt jeder der N Spins mit jedem gleich stark,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{l,l'} J\sigma_l\sigma_{l'} - h\sum_l \sigma_l. \tag{2}$$

Dabei ist $J = \hat{J}/N$. Dieses Modell lässt sich exakt lösen; zeigen Sie, dass das Ergebnis der Molekularfeldtheorie resultiert.

Aufgabe 36. (*6 Punkte*) Magnonen (Spinwellen) in Ferromagneten.
Der *Heisenberg-Hamilton-Operator*, der eine Beschreibung von bestimmten Ferromagneten leistet, ist durch

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{l,l'} J(|\vec{x}_l - \vec{x}_{l'}|)\vec{S}_l \cdot \vec{S}_{l'} \tag{3}$$

gegeben, wobei l und l' nächste Nachbarn in einem kubischen Gitter sind. Durch die *Holstein-Primakoff-Transformation*

$$S_l^+ = \sqrt{2S}\phi(n_l)a_l, \qquad S_l^- = \sqrt{2S}a_l^\dagger\phi(n_l), \qquad S_l^z = S - n_l \tag{4}$$

($S_l^\pm = S_l^x \pm iS_l^y$) mit $\phi(n_l) = \sqrt{1 - n_l/2S}$, $n_l = a_l^\dagger a_l$ und $[a_l, a_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'}$ sowie $[a_l, a_{l'}] = 0$ werden die Spin-Operatoren auf Bose-Operatoren transformiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Vertauschungsregeln für die Spinoperatoren erfüllt sind.

(b) Stellen Sie den Heisenberg-Operator bis in zweiter Ordnung (harmonische Näherung) durch die Bose-Operatoren a_l dar, indem Sie die Wurzel in der obigen Transformation in eine Taylor-Reihe entwickeln.