Allgemeine Hinweise: Aufgaben 28 und 29 sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 28. *(6 Punkte)* Niedrig-Temperatur Entwicklung
Bei der Beschreibung von idealen Fermigasen bei niedriger Temperatur müssen Integrale der Form

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) n(\varepsilon) \tag{1}$$

ausgewertet werden, wobei $n(\varepsilon)$ die Fermiverteilung zur Energie ε ist. Für niedrige Temperaturen weicht $n(\varepsilon)$ nur wenig von der Sprungfunktion $\Theta(\mu - \varepsilon)$ ab. Daher kann man näherungsweise setzen

$$I = \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon)\left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu-\varepsilon)\right] \tag{2}$$

$$\simeq \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon)\left[n(\varepsilon) - \Theta(\mu-\varepsilon)\right]. \tag{3}$$

Zeigen Sie durch die Reihenentwicklung von $f(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = \mu$, dass gilt

$$I = \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(k_\mathrm{B}T)^4 f'''(\mu) + \dots. \tag{4}$$

Leiten Sie damit, unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücke für das Großkanonische Potential und die Teilchenzahl, die Zustandsgleichungen des idealen Fermigases bei niedrigen Temperaturen ab ($T_F = \varepsilon_F / k_\mathrm{B}$)

$$\mu = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots\right) \tag{5}$$

$$p = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots\right) \tag{6}$$

$$U = \frac{3}{5}N\varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots\right) \tag{7}$$

Was ist die Wäremekapazität des idealen Fermigases bei konstantem Volumen?

Aufgabe 29. *(6 Punkte)* Phononengas
Gitterschwingungen in einem Festkörper können durch eine Kette gekoppelter harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. In einer Dimension lautet die klassische Hamiltonfunktion

$$H = \sum_n \left(\frac{m}{2}\dot{y}_n^2 + \frac{K}{2}(y_n - y_{n-1})^2\right), \tag{8}$$

wobei $y_n = x_n - x_n^0$ die Auslenkungen aus der Ruhelage x_n^0 bedeuten und $x_{n+1}^0 - x_n^0 = a$ die Gitterkonstante ist. Zeigen Sie, dass sich (8) auf eine Summe harmonischer Oszillatoren zurückführen lässt, die einem quantenmechanischem Hamiltonoperator

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

mit

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{ka}{2} \le \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

entsprechen. Man nennt die Anregungen *akustische Phononen.*

Aufgabe 30. Phononengas
Betrachten Sie erneut das Phononengas aus Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass für niedrige Temperaturen gilt

$$E = E_0(V) + C_1 T^4 \qquad (\textit{Debye'sches Gesetz}), \tag{11}$$

d.h. $C_V \sim T^3$, sowie für hohe Temperaturen

$$E = E_0(V) + 3Nk_\mathrm{B}T \qquad (\textit{Dulong Petit'sche Regel}), \tag{12}$$

d.h. $C_V \sim 3Nk_\mathrm{B}$.
Hinweis: Benutzen Sie die formale Analogie zum Photonengas.