

Aufgabe 17. Mikrokanonische Zustandsdichte

Betrachten Sie N harmonische Oszillatoren. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktsapproximation (siehe Materialsammlung) die mikrokanonische Zustandsdichte $\Omega(E)$ in führender Ordnung N .

Aufgabe 18. Spin-1/2 Teilchen und negative Temperaturen

Betrachte Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld, die zwei mögliche Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ mit zugehörigen Energien $E_{\pm} = \pm e$ (Zeeman Effekt) haben. Die Gesamtzahl der Teilchen ist $N = n_+ + n_-$.

- (a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Zustände bei gegebenem $E = (n_+ - n_-)e$ und $N = n_+ + n_-$ her. Man nähere den Ausdruck mit der Stirlingschen Formel $x! \simeq \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x$ für große N und E und zeige explizit, dass der zentrale Grenzwertsatz für die Verteilung von E zutrifft. Man berechne die Breite der Gaußkurve und die Erwartungswerte $\langle E \rangle$, $\langle |E| \rangle$ und $\langle E^2 \rangle$.
- (b) Zwei Systeme mit je N solchen Teilchen sind in Kontakt miteinander mit der Gesamtenergie $E = E_1 + E_2 = -N\epsilon$. Man plotte die exakte Gesamtzahl der Mikrozustände $\Omega(E_1, E_2)$ als Funktion von E_1 für $N = 10$, $N = 50$ und $N = 100$. Bestimmen Sie die Breite des Maximums für große N mit Hilfe der Stirlingschen Formel.
- (c) Berechnen und zeichnen Sie die Temperatur $T(N, E)$ eines Systems für große N als Funktion von E/N . In welchem Bereich werden die Temperaturen negativ? Was passiert für $T \rightarrow 0^+$ und $T \rightarrow \infty$? Ausgehend von einem gewöhnlichen Makrozustand mit $T > 0$, kann man experimentell einen Zustand mit $T < 0$ erzeugen? Warum, bzw. wie?
- (d) In welche Richtung fließt die Energie zwischen Reservoirs mit verschiedenen negativen Temperaturen, bzw. einer negativen und einer positiven Temperatur (mit Begründung)? Kann es negative Temperaturen in Systemen mit folgenden Teilchen geben: (i) freie Atome, (ii) Oszillatoren, (iii) klassische magnetische Momente im Magnetfeld? Warum?