

**Aufgabe 17.** Mikrokanonische Zustandsdichte

Betrachten Sie  $N$  harmonische Oszillatoren. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktsapproximation (siehe Materialsammlung) die mikrokanonische Zustandsdichte  $\Omega(E)$  in führender Ordnung  $N$ .

**Aufgabe 18.** Spin-1/2 Teilchen und negative Temperaturen

Betrachte Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld, die zwei mögliche Zustände  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  mit zugehörigen Energien  $E_{\pm} = \pm e$  (Zeeman Effekt) haben. Die Gesamtzahl der Teilchen ist  $N = n_+ + n_-$ .

- (a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Zustände bei gegebenem  $E = (n_+ - n_-)e$  und  $N = n_+ + n_-$  her. Man nähere den Ausdruck mit der Stirlingschen Formel  $x! \simeq \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x$  für große  $N$  und  $E$  und zeige explizit, dass der zentrale Grenzwertsatz für die Verteilung von  $E$  zutrifft. Man berechne die Breite der Gaußkurve und die Erwartungswerte  $\langle E \rangle$ ,  $\langle |E| \rangle$  und  $\langle E^2 \rangle$ .
- (b) Zwei Systeme mit je  $N$  solchen Teilchen sind in Kontakt miteinander mit der Gesamtenergie  $E = E_1 + E_2 = -N\epsilon$ . Man plote die exakte Gesamtzahl der Mikrozustände  $\Omega(E_1, E_2)$  als Funktion von  $E_1$  für  $N = 10$ ,  $N = 50$  und  $N = 100$ . Bestimmen Sie die Breite des Maximums für große  $N$  mit Hilfe der Stirlingschen Formel.
- (c) Berechnen und zeichnen Sie die Temperatur  $T(N, E)$  eines Systems für große  $N$  als Funktion von  $E/N$ . In welchem Bereich werden die Temperaturen negativ? Was passiert für  $T \rightarrow 0^+$  und  $T \rightarrow \infty$ ? Ausgehend von einem gewöhnlichen Makrozustand mit  $T > 0$ , kann man experimentell einen Zustand mit  $T < 0$  erzeugen? Warum, bzw. wie?
- (d) In welche Richtung fließt die Energie zwischen Reservoirs mit verschiedenen negativen Temperaturen, bzw. einer negativen und einer positiven Temperatur (mit Begründung)? Kann es negative Temperaturen in Systemen mit folgenden Teilchen geben: (i) freie Atome, (ii) Oszillatoren, (iii) klassische magnetische Momente im Magnetfeld? Warum?