Allgemeine Hinweise: Das erste Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Es wird in der ersten Übungsstunde besprochen.

Aufgabe 1.
Ist das Differential

$$\omega = \left(y^2 z^3 - 6xz^2\right) \mathrm{d}x + 2xyz^3 \mathrm{d}y + \left(3xy^2 z^2 - 6x^2 z\right) \mathrm{d}z \tag{1}$$

vollständig? Falls ja, geben Sie eine Funktion F an mit $\mathrm{d}F = \omega$.

Aufgabe 2.
In der Thermodynamik betrachtet man häufig Variationen von Zustandsgrößen bei festgehaltenen anderen Zustandsgrößen. In dieser Aufgabe sollen einige in diesem Zusammenhang wichtige Formeln vorgestellt werden.
Betrachten Sie die Variation der Zustandsgrößen x, y und z unter der Nebenbedingung $\Psi(x, y, z) =$ konstant. Im Folgenden bezeichnet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z}$ die partielle Ableitung von x nach y unter der Nebenbedingung, dass Ψ und z konstant gehalten werden.

(a) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{x,z}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y,z}}. \tag{2}$$

analog gilt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\Psi,x} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{x,y}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{x,z}}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\Psi,y} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{x,y}}. \tag{4}$$

Diese drei Gleichungen ergeben zusammen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\Psi,x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\Psi,y} = -1. \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi,z} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z}}. \tag{6}$$

(c) Seien nun x, y und z eine Funktion der Variable t. Drücken Sie $\mathrm{d}\Psi$ durch $\mathrm{d}t$ aus und verwenden Sie $\mathrm{d}\Psi = 0$ (wegen der Nebenbedingung $\Psi =$ konstant) um zu zeigen:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi,z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\Psi,z}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\Psi,z}}. \tag{7}$$

Aufgabe 3.
Beweisen Sie die Stirlingsche Formel

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}, \tag{8}$$

indem Sie von $N! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^N e^{-x}$ ausgehen und den Integranden $f(x) \equiv x^N e^{-x}$ bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $g(x) = Ae^{-(x-N)^2/a^2}$ anpassen. $f(x)$ hat ein scharfes Maximum bei $x_0 = N$.

Aufgabe 4.
Man bestimme die Wahrscheinlichkeit $w(N, m)$ dafür, bei einem System von N Spins genau m mit der Einstellung '$\uparrow$' und dementsprechend $N - m$ mit der Einstellung '$\downarrow$' anzutreffen. Es sei kein äußeres Feld und keine Wechselwirkung unter den Spins vorhanden, sodass für jeden einzelnen Spin die Konfiguration $\uparrow$ und $\downarrow$ gleich wahrscheinlich sind.

(a) Man prüfe

$$\sum_{m=0}^{N} w(N, m) = 1. \tag{9}$$

(b) Berechnen Sie den Mittelwert von m,

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{N} w(N, m) m, \tag{10}$$

und die Schwankung $\left(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2\right)^{1/2}$. Die dimensionslose Magnetisierung wird durch $M = 2m - N$ definiert. Geben Sie dafür den Mittelwert und die Schwankung an.

(c) Berechnen Sie die Verteilung $w(N, M)$ für große N. Nehmen Sie $|M/N| \ll 1$ an.