Sattelpunktsmethode

Wir wollen ein Intgeral vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{if(k)}$$

näherungsweise berechnen. Wenn $f(k)$ stark mit k variiert, so stellt das Integral eine Superposition von oszillierenden Termen mit vielen dicht liegenden Frequenzen dar. Die Überlagerung führt zu einer destruktiven Interferenz. Wesentliche Beiträge sind daher nur in k Bereichen zu erwarten in denen sich $f(k)$ wenig ändert. Dies ist gerade an den Extrema (Sattelpunkten) der Fall.

(i) ein Extremum $\quad k = k_0$, wobei $f'(k = k_0) = 0$

Entwickeln von $f(k)$ an der Stelle $k = k_0$ ergibt

$$f(k) = f(k_0) + \frac{1}{2}\, f''(k_0)\,(k - k_0)^2 + \cdots$$

Einsetzen und Vernachlässigung der höheren Beiträge liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{if(k)} \;\approx\; e^{if(k_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left\{ \frac{i}{2} f''(k_0)(k - k_0)^2 \right\}.$$

Das verbleibende Integral ist ein komplexes Gauss'sches Integral. Für $\mathrm{Im}[f''(k_0)] > 0$ ist dieses konvergent und liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left\{ \frac{i}{2} f''(k_0)(k - k_0)^2 \right\} = \sqrt{\frac{2\pi i}{f''(k_0)}}.$$

Somit erhält man insgesamt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{if(k)} \;\approx\; e^{if(k_0)} \sqrt{\frac{2\pi i}{f''(k_0)}}.}$$

(ii) mehrere Extrema $\quad k = k_1, k_2, \ldots, k_n$, wobei $f'(k = k_j) = 0$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{if(k)} \;\approx\; \sum_{k_j} e^{if(k_j)} \sqrt{\frac{2\pi i}{f''(k_j)}}.}$$