Mikrokanonische Zustandssumme von Spin $1/2$ Teilchen

Wir betrachten N Spin $1/2$ Teilchen in einem äusseren Magnetfeld mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -h \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^z$$

Die Zustandsdichte ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\Omega(E) &= \sum_{\sigma_i=\pm 1} \delta\left(E + h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right) \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{\sigma_i=\pm 1} \exp\left\{ ik \left(E + h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right)\right\} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikE} \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{\sigma=\pm 1} e^{ih\sigma k}\right) \\
&= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikE} 2 \Big(\cos(kh)\Big)^{N}
\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral lösen wir näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{if(k)} \approx \sqrt{\frac{2\pi i}{f''(k_0)}}\, e^{if(k_0)}$$

wobei $\mathrm{Im}[f''(k = k_0)] > 0$ angenommen wurde und k_0 ein Extremum von $f(k)$ bezeichnet, d.h. $f'(k = k_0) = 0$. Es wurde auch zur Vereinfachung angenommen, daß es nur ein Extremum gibt.

Damit ergibt sich

$$\underline{\underline{\Omega(E) = \exp\left\{ -\frac{N}{2} \left[(1+\epsilon) \ln\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) + (1-\epsilon) \ln\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\log N)\right\}}}$$

wobei $\epsilon = E/(Nh)$.