thermodynamische Potentiale des idealen, einatomigen Gases

$$\begin{array}{lrcl} \text{kalorische Zustandsgleichung} & U & = & \frac{3}{2}NkT \\ \text{thermische Zustandsgleichung} & p & = & Nk\frac{T}{V} \end{array}$$

gesucht $S(U,V)$ bzw. $U(S,V)$

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{p}{T}\,dV = \frac{3}{2}\frac{Nk}{U}\,dU + \frac{Nk}{V}\,dV$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{3}{2}\frac{Nk}{U}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{Nk}{V}$$

$$\begin{aligned} S(U,V) &= \frac{3}{2}Nk\ln(U/U_0) + f(V) \\ S(U,V) &= Nk\ln(V/V_0) + g(U) \end{aligned}$$

dies liefert

$$\underline{\underline{S(U,V) = \frac{3}{2}Nk\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + Nk\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{S(T,V) = \frac{3}{2}Nk\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + Nk\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)}}$$

Auflösung der ersten Gleichung nach U liefert

$$\underline{\underline{U = U_0\exp\left\{\frac{S-S_0}{3/2Nk}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3}}}$$

Man erkennt, dass die Kenntnise **beider** Zustandsgleichungen notwendig ist um die Potentiale $S(U,V)$ bzw. $U(S,V)$ zu berechnen.

Umgekehrt erhält man sofort

$$\begin{array}{rclcl} \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V & = & \frac{3}{2}\frac{Nk}{U} & \Rightarrow & U = \frac{3}{2}NkT, \\ \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U & = & \frac{Nk}{V} & \Rightarrow & pV = NkT \end{array}$$

andere thermodynamische Potentiale ergeben sich mittels Legendretransformation

$$F(V,T) = U - TS = \frac{3}{2}NkT - TS$$

mit $S(T,V)$ von oben findet man

$$\underline{\underline{F(V,T) = \frac{3}{2}NkT - \frac{3}{2}NkT\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - NkT\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)}}$$

analog

$$H(p,S) = U + pV$$

mit $U(S,V)$ von oben

$$H(p,S) = C \exp\left\{\frac{2S}{3Nk}\right\}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3} + pV$$

ausserdem folgt aus $S(V,T)$ von oben

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) &= \frac{2S}{3Nk} - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right), \\
\frac{T}{T_0} &= \exp\left\{\frac{2S}{3Nk}\right\}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3} = \exp\left\{\frac{2S}{3Nk}\right\}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{-2/3}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-2/3}
\end{aligned}$$

auflösen liefert

$$\frac{T}{T_0} = \exp\left\{\frac{2S}{5Nk}\right\}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/5}$$

analog

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p_0}{p}\frac{T}{T_0} = \exp\left\{\frac{2S}{5Nk}\right\}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-3/5}$$

das liefert schliesslich

$$\underline{\underline{H(p,S) = \tilde{C}\exp\left\{\frac{2S}{5Nk}\right\}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/5}}}$$

letztlich kann man ebenfalls berechnen

$$G(p,T) = F + pV$$

$$\begin{aligned}
G(p,T) &= \frac{3}{2}NkT - \frac{3}{2}NkT\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - NkT\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + NkT \\
&= \frac{3}{2}NkT - \frac{3}{2}NkT\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - NkT\ln\left(\frac{p_0 T}{T_0 p}\right)
\end{aligned}$$

das liefert

$$\underline{\underline{G(p,T) = \frac{5}{2}NkT - \frac{5}{2}NkT\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + NkT\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}}$$