

*Allgemeine Hinweise:* Alle Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

**Aufgabe 31.**

Eindimensionales Ising-Modell: Berechnen Sie die Zustandssumme  $Z_N$  für ein eindimensionales Ising-Modell mit  $N$  Spins mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^{N-1} J_i S_i S_{i+1}. \quad (1)$$

*Hinweis:* Zeigen Sie die Rekursionsrelation  $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(J_N/k_B T)$ .

**Aufgabe 32.**

Im sog. Weiß-Modell wechselwirkt jeder der  $N$  Spins mit jedem gleich stark,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l,l'} J \sigma_l \sigma_{l'} - h \sum_l \sigma_l. \quad (2)$$

Dabei ist  $J = \hat{J}/N$ . Dieses Modell lässt sich exakt lösen; zeigen Sie, dass das Ergebnis der Molekularfeldtheorie resultiert.

**Aufgabe 33.**

Magnonen (=Spinwellen) in Ferromagneten. Der *Heisenberg-Hamilton-Operator*, der eine Beschreibung von bestimmten Ferromagneten leistet, ist durch

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l,l'} J(|\vec{x}_l - \vec{x}_{l'}|) \vec{S}_l \cdot \vec{S}_{l'} \quad (3)$$

gegeben, wobei  $l$  und  $l'$  nächste Nachbarn in einem kubischen Gitter sind. Durch die *Holstein-Primakoff-Transformation*

$$S_l^+ = \sqrt{2S} \phi(n_l) a_l, \quad S_l^- = \sqrt{2S} a_l^\dagger \phi(n_l), \quad S_l^z = S - n_l \quad (4)$$

( $S_l^\pm = S_l^x \pm i S_l^y$ ) mit  $\phi(n_l) = \sqrt{1 - n_l/2S}$ ,  $n_l = a_l^\dagger a_l$  und  $[a_l, a_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'}$  sowie  $[a_l, a_{l'}] = 0$  werden die Spin-Operatoren auf Bose-Operatoren transformiert.

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vertauschungsregeln für die Spinoperatoren erfüllt sind.

**(b)** Stellen Sie den Heisenberg-Operator bis in zweiter Ordnung (harmonische Näherung) durch die Bose-Operatoren  $a_l$  dar, indem Sie die Wurzel in der obigen Transformation in eine Taylor-Reihe entwickeln.