

Aufgabe 16. Mikrokanonische Zustandsdichte

Betrachten Sie N harmonische Oszillatoren. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2}). \quad (1)$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktapproximation die mikrokanonische Zustandsdichte $\Omega(E)$ in führender Ordnung in N .

Aufgabe 17. Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen und negative Temperaturen

Betrachte Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem Magnetfeld, die zwei mögliche Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ mit zugehörigen Energien $E_\pm = \pm\epsilon$ (Zeemann Effekt) haben. Die Gesamtzahl der Teilchen ist $N = n_+ + n_-$.

- (a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Zustände bei gegebenem $E = (n_+ - n_-)\epsilon$ und $N = n_+ + n_-$ her. Man nähere den Ausdruck mit der Stirlingschen Formel $x! \approx \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x$ für große N und E und zeige explizit, dass der zentrale Grenzwertsatz für die Verteilung von E zutrifft. Man berechne die Breite der Gaußkurve und die Erwartungswerte $\langle E \rangle$, $\langle |E| \rangle$, $\langle E^2 \rangle$.
- (b) Zwei Systeme mit je N solcher Teilchen sind in Kontakt miteinander mit Gesamtenergie $E = E_1 + E_2 = -N\epsilon$. Man plotte die exakte Gesamtzahl der Mikrozustände $\Omega(E_1, E_2)$ als Funktion von E_1 für $N = 10$, $N = 50$ und $N = 100$. Bestimmen Sie die Breite des Maximums für große N mit Hilfe der Stirlingschen Formel.
- (c) Berechnen und zeichnen Sie die Temperatur $T(N, E)$ eines Systems für große N als Funktion von $\frac{E}{N}$. In welchem Bereich werden die Temperaturen negativ? Was passiert für $T \rightarrow 0^-$ und $T \rightarrow \infty$? Ausgehend von einem gewöhnlichen Makrozustand mit $T > 0$, kann man experimentell einen Zustand mit $T < 0$ erzeugen? Warum, bzw wie?
- (d) In welcher Richtung fließt die Energie zwischen Reservoirs mit verschiedenen negativen Temperaturen, bzw. einer negativen und einer positiven Temperatur (mit Begründung)? Kann es negative Temperaturen in Systemen mit folgenden Teilchen geben: (i) Freie Atome, (ii) Oszillatoren, (3) klassische magnetische Momente im Magnetfeld? Warum?