Allgemeine Hinweise: Alle Aufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 13.
Berechnen Sie für ein Gas, das der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_B T}\right\} \tag{1}$$

genügt, wobei $v = |\vec{v}|$ ist,

(a) den wahrscheinlichsten Wert der x-Komponente der Geschwindigkeit,
(b) den Mittelwert der x-Komponente der Geschwindigkeit,
(c) den wahrscheinlichsten Wert des Absolutbetrages der Geschwindigkeit,
(d) den Mittelwert des Absolutbetrages der Geschwindigkeit,
(e) die wahrscheinlichste kinetische Energie,
(f) den Mittelwert der kinetischen Energie.

Im Folgenden werde die eindimensionale diskrete Zufallsbewegung ("random walk") betrachtet: Auf einem linearen Gitter äquidistanter Punkte führe ein Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p Sprünge zum jeweils rechten und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ Sprünge zum jeweils linken Nachbarplatz aus.

Aufgabe 14.
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $W_N(n)$, dass das Teilchen von insgesamt N Sprüngen genau n nach rechts und damit auch $(N-n)$ nach links macht, gegeben ist durch

$$W_N(n) = p^n(1-p)^{N-n}\frac{N!}{n!(N-n)!} = p^n(1-p)^{N-n}\binom{N}{n}. \tag{2}$$

(*Hinweis:* n der N Teilchen müssen also einen Sprung nach rechts und die übrigen $(N-n)$ Teilchen einen Sprung nach links ausführen.)
Skizzieren Sie diese sog. Binomialverteilung graphisch für den Fall $p = 1/2$ und $N = 20$. Zeigen Sie, dass diese Verteilung normiert ist, d.h.,

$$\sum_{n=0}^{N} W_N(n) = 1. \tag{3}$$

Aufgabe 15.

(a) Zeigen Sie, dass die Mittelwerte $\langle n\rangle$ und $\langle n^2\rangle$ der Verteilung (2) gegeben sind durch

$$\langle n\rangle = Np, \tag{4}$$
$$\langle n^2\rangle = N^2p^2 + Np(1-p). \tag{5}$$

Wie groß ist die relative Streuung $\sqrt{\langle\Delta n^2\rangle}/\langle n\rangle$, wobei $\langle\Delta n^2\rangle = \langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle$ ist?

Bitte wenden!

Unter Verwendung der Stirlingschen Formel ($\nu \to \infty$)

$$\nu! \to (2\pi\nu)^{1/2}\nu^{\nu}e^{-\nu} \tag{6}$$

kann man zeigen, dass $W_N(n)$ aus Aufgabe 14 im Grenzfall großer N gegeben ist durch

$$W_N(n) \to \overline{W}_N(n) = \left[\frac{N}{2\pi n(N-n)}\right]^{1/2} N^N \left[\frac{p}{n}\right]^n \left[\frac{1-p}{N-n}\right]^{N-n} . \tag{7}$$

Zeigen, Sie dass $\overline{W} := \overline{W}_N(\langle n \rangle) = [2\pi \langle \Delta n^2 \rangle]^{-1/2}$.

(b) Die Taylorentwicklung von $\ln \bar{W}_N(n)$ nach $n - \langle n \rangle$ kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\ln \bar{W}_N(n) = \ln \bar{W} - \frac{1}{2\langle \Delta n^2 \rangle}(n - \langle n \rangle)^2 + \cdots . \tag{8}$$

Unter welchen Voraussetzungen ergeben die ersten beiden Terme eine gute Näherung für $\ln \bar{W}_N(n)$? Zeigen Sie, daß die hieraus resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung durch folgende Gauß-Verteilung beschrieben wird:

$$W_N^G(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \Delta n^2 \rangle}} \exp\left\{-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\langle \Delta n^2 \rangle}\right\} \tag{9}$$