Allgemeine Hinweise: Das erste Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Es wird in der ersten Übungsstunde (Di, 24.04.12 bzw. Fr, 27.04.12) besprochen.

Aufgabe 1.
Gegeben ist die Funktion $F(x,y) = f[u(x,y), v(x,y)] = u^2v + e^v$ mit $u(x,y) = x^2 + y^2$ und $v(x,y) = xy$. Bilden Sie nach der Kettenregel die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Aufgabe 2.
Ist das Differential

$$\omega = (y^2z^3 - 6xz^2)dx + 2xyz^3dy + (3xy^2z^2 - 6x^2z)dz \tag{1}$$

vollständig? Falls ja, geben Sie eine Funktion F an mit $dF = \omega$.

Aufgabe 3. Allgemeine Kettenregel
In der Thermodynamik betrachtet man häufig Variationen von Zustandsgrößen bei festgehaltenen anderen Zustandsgrößen. In dieser Aufgabe sollen einige in diesem Zusammenhang wichtige Formeln vorgestellt werden.
Betrachten Sie die Variation der Zustandsgrößen x, y und z unter der Nebenbedingung $\psi(x,y,z) =$ konstant. Im Folgenden bezeichnet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\psi,z}$ die partielle Ableitung von x nach y unter der Nebenbedingung, daß ψ und z konstant gehalten werden.

(a) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\psi,z} = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x,z}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{y,z}} \tag{2}$$

analog gilt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\psi,x} = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{x,y}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x,z}} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\psi,y} = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{x,y}} \tag{4}$$

Diese drei Gleichungen ergeben zusammen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\psi,z}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\psi,x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\psi,y} = -1. \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\psi,z} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\psi,z}} \tag{6}$$

(c) Seien nun x, y, und z eine Funktion der Variable t. Drücken Sie $d\psi$ durch dt aus und verwenden Sie $d\psi$=0 (wegen der Nebenbedingung ψ = konstant) um zu zeigen:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\psi,z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\psi,z}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\psi,z}}. \tag{7}$$