

Statistische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen statistisch unabhängig falls gilt

$$\begin{array}{|l} P(a|b) = P(a) \\ \text{bzw} \quad P(b|a) = P(b) \end{array}$$

$$\text{d.h.} \quad P(a, b) = P(a) P(b)$$

0.2. zentraler Grenzwertsatz

Betrachte N unabhängige Zufallsvariable $X_1, X_2, \dots, X_N$ mit identischer (aber unabhängiger) Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ ($X = X_1, X = X_2, \dots$)

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{Zufallsvariable}$$

Frage: was ist Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y)$?

dazu führen wir an

$$Z = \sqrt{N} (Y - \langle X \rangle) = \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \langle X \rangle)}{\sqrt{N}}$$

wobei $\langle X \rangle = \langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = \dots = \langle X_N \rangle$

$$p(z) = \int dx_1 \dots dx_N p(x_1) \dots p(x_N)$$

$$\delta(z - \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} + \sqrt{N} \langle x \rangle)$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N p(x_1) \dots p(x_N) e^{-ik(x_1 + \dots + x_N)/N} e^{ik\sqrt{N} \langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik\sqrt{N} \langle x \rangle} \left[x \left(\frac{N}{k} \right) \right]^N$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik\sqrt{N} \langle x \rangle} e^{N \Phi(k/N)}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} e^{ik\sqrt{N} \langle x \rangle} e^{-\frac{1}{2} k^2 \langle x^2 \rangle - \frac{1}{6} k^3 \langle x^3 \rangle + \frac{1}{8} k^4 \langle x^4 \rangle + \dots}$$

Im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ und unter der Annahme, daß $\langle x^2 \rangle$ endlich $\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \Delta x^2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} e^{-\frac{1}{2} k^2 \Delta x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta x^2}} e^{-\frac{z^2}{2 \Delta x^2}}$$

und somit

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \Delta x \rangle^2 / N} e^{-\frac{(y - \langle x \rangle)^2}{2 \langle \Delta x \rangle^2 / N}} \quad \square$$

Gauß Verteilung!

$$\langle Y \rangle = N \langle X \rangle$$

$$\Delta y = \Delta x / \sqrt{N}$$

$$\frac{\Delta y}{\langle Y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle X \rangle} \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Aussagen über Y werden im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ scharf!

0.3. klassische Ensemble

N Teilchen mit vorgeg. Koordinaten $q_1, \dots, q_{3N}$
und -"- Impulsen $p_1, \dots, p_{3N}$

$\Rightarrow$ Phasenraum Γ

Vereinfachung in der Notation

$$g(q, p, t) dq dp \equiv g(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N}) \\ \prod_{i=1}^{3N} dq_i dp_i$$

$$\rho(q, p, t) = \int dq_0 \int dp_0 \rho(q_0, p_0) \delta(q - q(t; q_0, p_0)) \delta(p - p(t; q_0, p_0))$$

kanonische Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\underline{v} = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$$\text{div } \underline{v} = \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_i \int dq_0 \int dp_0 \rho(q_0, p_0) \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \delta(q - q(t; q_0, p_0)) \delta(p - p(t; q_0, p_0))$$

$$= - \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_i \left(-\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}}$$

Liouville Gleichung

analog $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\underline{v} \rho)$

Kontinuitätsgleichung
für Flüssigkeit

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Inkompressibilität}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{d}{dt} S = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial S}{\partial \dot{p}_i}$$

$$\frac{d}{dt} S(q(t), p(t), t) = 0$$

anschaulich: zeitliche Änderung im mitbewegten Bezugssystem
 $q = q(t)$ $p = p(t)$ verschwindet

$\Leftrightarrow$ Konstanz des Phasenraumvolumens

Ein Ensemble von Teilchen mit q_{i0}, p_{i0} die zu $t=0$ ein Phasenraumvolumen T_0 ausfüllen werden zu allen Zeiten ein gleich großes Phasenraumvolumen ausfüllen

0.4. Quantensemble

- Q.M. System beschreiben durch $|\varphi\rangle$
- physikalische Größen sind Erwartungswerte
 $\langle \hat{A} \rangle = \langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle$

Vorallg.: $\boxed{\hat{\rho} \equiv |\varphi\rangle\langle\varphi|}$ (*) reiner Zustand

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{A} \}$$

$$\boxed{\text{Tr} \{ \hat{\rho} \} = 1 \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}}$$

hier ist $\text{Tr} \{ \hat{X} \} = \sum_n \langle n | \hat{X} | n \rangle$
in einer beliebigen ONB

(*) hat den Vorteil, daß auch Systeme mit unvollständiger Kenntnis beschrieben werden können

liegt System mit Wahrscheinlichkeiten p_i in $|\varphi_i\rangle$ vor wobei $p_i \geq 0$ $\sum_i p_i = 1$

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \sum_i p_i \langle \varphi_i | \hat{A} | \varphi_i \rangle \\ &= \text{Tr} \left\{ \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \hat{A} \right\}\end{aligned}$$

$\hat{\rho} = \sum_i p_i \varphi_i\rangle \langle \varphi_i $	Dichtematrix
--	--------------

Eigenschaften

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho} \} = 1$$

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$$

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \} < 1$$

falls $p_i \neq 0$ für mehr als ein i

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \} = 1 \Leftrightarrow \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

reiner Zustand

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \} < 1 \Leftrightarrow \hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$$

gemischter Zustand

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} &= \sum_i p_i \left(\frac{\partial}{\partial t} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| + |\varphi_i\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_i| \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i \left(\hat{H} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| - |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \hat{H} \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{S}]}$$

Von Neumann
Gleichung

1. Gleichgewichtensemble

makroskopisches System

$10^{19} \dots 10^{23}$ Teilchen

Messung physikalischer Größen $\xrightarrow{\text{i.A.}}$ Mittelung über Zeitintervall
Mittelung über viele Teilchen

- d.h. für relevante Größen sollten nur gemittelte (zeitlich und/oder Ensemble) Werte relevant sein
- darüberhinaus sagt die Erfahrung, daß Schwankungen um die Mittelwerte bei hinreichend großen Meßzeitintervallen / Teilchenzahlen vernachlässigbar sind