Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 30.** *Virialsatz*
Gegeben sei der Hamiltonoperator in einer Dimension

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{pot}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass in Ortsdarstellung gilt:

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right] = \hat{x}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{1}{m}\hat{p}^2. \tag{2}$$

(b) Sein nun φ_E ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Energie E. Folgern Sie aus (2), dass

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle_E = \frac{1}{2}\left\langle \hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)\right\rangle_E \tag{3}$$

gilt, wobei $\langle \bullet \rangle_E$ den Erwartungswert im Zustand φ_E bezeichnet.

(c) Nun sei speziell

$$V(\lambda x) = \lambda^n V(x), \tag{4}$$

d.h. $V(x)$ ist eine homogene Funktion vom Grad n. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\langle \hat{H}_{\text{kin}} \right\rangle_E = \frac{n}{2}\left\langle \hat{H}_{\text{pot}} \right\rangle_E \qquad \text{(Virialsatz)}. \tag{5}$$

Hinweis: Differentiation von (4) nach λ.

☗ **Aufgabe 31.** *Drehimpuls-Leiteroperatoren*
In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\hat{\vec{L}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\right) + \hat{L}_z^2, \tag{6}$$

wobei die $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ die Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses bedeuten.

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in sphärischen Polarkoordinaten die Polarkoordinatendarstellung der Leiteroperatoren her.

(b) Leiten Sie mit Hilfe vom (6) die Darstellung von $\hat{\vec{L}}^2$ in spärischen Polarkoordinaten her und zeigen Sie damit, dass sich der 3-dimensionale Laplaceoperator in Kugelkoordinaten durch $\hat{\vec{L}}^2$ ausdrücken lässt:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{7}$$

Aufgabe 32. *Spin 1*

(a) Zeigen Sie, dass die sogenannten Spinmatritzen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

den Vertauschungsregeln $[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$ und $[\hat{s}_i, \hat{\vec{s}}^{\,2}] = 0$ des Drehimpulses genügen. Was ist $\hat{\vec{s}}^{\,2}$ und welche Eigenwerte hat dieser Operator?

(b) Die Eigenzustände (Eigenspinore) von $\hat{s}_z$ sind

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Linearkombinationen von $\Psi_\pm$ sind Eigenspinoren von $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y$?

Aufgabe 33. *Spin 2*

Die allgemeine Spin-Komponente eines Spin-1/2 Systems ist $\hat{s}_{\vec{n}} := 1/2\vec{n}\hat{\vec{\sigma}}$, wobei $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ der allgemeine Einheitsvektor ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{s}_{\vec{n}}$ und einen vollständigen Satz orthonormierter Eigenzustände. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$in diesen Eigenzuständen.