Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 23.** *Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten*

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2, \tag{1}$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

(a) Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

(b) Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen ξ und η ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.Allg. die in (a) gefundene Entartung aufhebt.

☗ **Aufgabe 24.** *Kohärente Zustände*

(a) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle\alpha|\beta\rangle$?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems, dass für einen kohärenten Zustand gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)|0\rangle\,, \tag{2}$$

wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 0 bedeutet.

(c) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände übervollständig sind, d.h.

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}, \tag{3}$$

wobei $\int \mathrm{d}^2\alpha = \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$ mit $\alpha = u + iv = re^{i\varphi}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^n e^{-x} = n!$.

Bitte wenden!

Aufgabe 25. *Drehimpuls-Leiteroperatoren*

Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_z = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle, |m = 0\rangle, |m = 1\rangle$ von $\hat{L}_z$ dar.

(a) Zeigen Sie, dass der Eigenwert von $\hat{\vec{L}}^2$, $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 1$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ jeweils zum Eigenwert $m = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Satz von Vektoren eine orthogonale, vollständige Basis bildet.