Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 20.** *Halber Harmonischer Oszillator*
Betrachten Sie zunächst einen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit Frequenz ω und Masse m. Die zugehörigen Energieigenwerte und Funktionen sind E_n und $\phi_n(x)$. Nun werde eine unendlich hohe Potentialstufe bei x= 0 hinzugenommen, sodass

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit Potentialbarriere bis auf einen Normierungsfaktor eine Untermenge der Eigenfunktionen ϕ_n des harmonischen Oszillators sind. Was sind die zugehörigen Eigenenergien?

(b) Sei $\Psi_0(x)$ eine beliebige Wellenfunktion im Potential V(x) zur Zeit $t = 0$. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t = T$ die Wellenfunktion in ihr Negatives übergeht, d.h., dass gilt

$$\Psi(x, T) = -\Psi(x, 0) = -\Psi_0(x).$$

T is hierbei die Schwingdauer des Oszillators, d.h. $\omega T = 2\pi$. Was passiert bei $t = 2T$?

☗ **Aufgabe 21.** *Summenregel*
Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ welches nur gebundene Zustände $|E_n\rangle$ zu den Eiegnwerten E_n des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

besitzt, d.h.

$$\hat{H}\,|E_n\rangle = E_n\,|E_n\rangle\,.$$

(a) Zeigen Sie

$$\left[\left[\hat{x}, \hat{H}\right], \hat{x}\right] = \frac{\hbar^2}{m}.$$

(b) Beweisen Sie mit (a) durch geschicktes Einfügen eines Einheitsoperators $\mathbb{1} = \sum_k |E_k\rangle\langle E_k|$ die Summenregel des Dipolmatrixelementes $\hat{d} = e\hat{x}$

$$\sum_k \omega_{kn} |\langle E_n|\,\hat{d}\,|E_k\rangle|^2 = \sum_k \omega_{kn}\,\langle E_n|\,\hat{d}\,|E_k\rangle\,\langle E_k|\,\hat{d}\,|E_n\rangle = \frac{\hbar e^2}{2m},$$

wobei $\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n$.

(c) Prüfen Sie die Summenregel explizit für den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator

Aufgabe 22. *Hermitesche Polynome*
Beweisen Sie, dass $e^{2\lambda\xi-\lambda^2}$ erzeugende Funktion der Hermiteschen Polynome ist, d. h., dass gilt:

$$e^{2\lambda\xi-\lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\xi).$$

Zeigen Sie damit die Symmetrieeigenschaft $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$ und weiterhin, dass die Hermiteschen Polynome folgende Gleichungen erfüllen:

$$H_n^{'}(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi),$$
$$2\xi H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi).$$