

Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinen Haus ■ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

■ **Aufgabe 17.** *Streuung an Kastenbarriere*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x -Achse im Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a \\ V_0 & \text{für } |x| \leq a. \end{cases}$$

Für ein Teilchen, das sich von $x = -\infty$ mit vorgegebener Energie $E > 0$ auf die Barriere zubewegt, hat die stationäre Wellenfunktion die Form

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & \text{für } x < -a \\ \beta_+ e^{Kx} + \beta_- e^{-Kx} & \text{für } -a \leq x \leq a \\ t e^{ikx} & \text{für } x > a. \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Teils der Wellenfunktion.
- (b) Wie groß sind Reflektions- und Transmissionsvermögen für $0 < E < V_0$ sowie für $E > V_0$

$$R := \left| \frac{j_{\text{refl}}}{j_0} \right|, \quad T := \left| \frac{j_{\text{trans}}}{j_0} \right| \quad ?$$

- (c) Wie groß ist T für $E = V_0$?

■ **Aufgabe 18.** *Baker-Hausdorff-Theorem*

- (a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren \hat{A} und \hat{B} und komplexe Zahlen x gilt:

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] x + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] x^2 + \dots \quad (1)$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}}$

- (b) Unter Verwendung von Gleichung (1) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}, \quad (2)$$

falls $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von \hat{f} und der Verwendung von $e^{-x\hat{A}} e^{x\hat{A}} = \mathbb{1}$.

Aufgabe 19. *Doppel-Delta-Potential*

Es werden zwei identische attraktive Delta Potentiale im Abstand d voneinander betrachtet:

$$V(x) = -F \left(\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right),$$

wobei $F > 0$ sei. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Teilgebieten $-\infty < x \leq -d/2$, $-d/2 \leq x \leq d/2$, $d/2 \leq x < \infty$. Finden Sie die gebundenen Zustände und die dazugehörigen Energien.