Hinweis zur Übungsabgabe: Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

Aufgabe 10. *Ableitung einer operatorwertigen Funktion*
Die Ableitung einer stetigen, operatorwertigen Funktion $A(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, ist durch

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{A(\lambda+\epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon} \tag{1}$$

definiert (vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert). Zeigen Sie:

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(AB) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}B + A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}; \tag{2}$$

(b) *

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A^{-1} = -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}A^{-1}; \tag{3}$$

(c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{e}^{\lambda C} = C\mathrm{e}^{\lambda C}, \quad \text{falls} \quad C \neq C(\lambda); \tag{4}$$

(d)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A^n = \sum_{l=1}^{n} A^{l-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}A^{n-l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Berechnen Sie speziell für $A \neq A(\lambda), B \neq B(\lambda)$ die Ableitungen

$$(\mathbf{e}) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda B}A\mathrm{e}^{-\lambda B}) \quad \text{und} \quad (\mathbf{f}) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda A}\mathrm{e}^{\lambda B}). \tag{6}$$

*(Anleitung zu (b) : Benutzen Sie $A^{-1}A = \mathbb{1}$ und die Produktregel von (a).)

Aufgabe 11. *Matrixexponentiale*
Gegeben sei die selbstadjungierte Matrix

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Berechnen Sie die matrixwertige Funktion

$$\hat{T}(\alpha) := \mathrm{e}^{i\alpha\hat{A}}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{8}$$

(a) mithilfe der Matrix-Exponentialreihe.

(b) mithilfe der Spektraldarstellung.

Aufgabe 12. *Unschärferelation*

(a) Es sei $[\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}$ und $[\hat{A}, \hat{C}] = \hat{B}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(\hat{A}\hat{B})\Delta\hat{C} \geq \frac{1}{2}\langle \hat{A}^2 + \hat{B}^2 \rangle \tag{9}$$

gilt.

(b) In einer räumlichen Dimension gilt:

$$\langle \Delta\hat{r}_\alpha^2 \rangle \langle \Delta\hat{p}_\alpha^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \tag{10}$$

wobei $\alpha = x, y, z$ ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle \Delta\hat{\vec{r}}^{\,2} \rangle \langle \Delta\hat{\vec{p}}^{\,2} \rangle \geq \frac{9\hbar^2}{4}. \tag{11}$$

Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $\langle \hat{r}_\alpha \rangle = \langle \hat{p}_\alpha \rangle = 0$ ist und verwenden Sie die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \qquad \text{für } a, b > 0. \tag{12}$$

Aufgabe 13. *Freier Fall*
Die eindimensionale Schrödingergleichung bei Vorhandensein einer konstanten Kraft $F = -mg$ (freier Fall) lautet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx\right]\psi(x,t). \tag{13}$$

(a) Leiten Sie aus der obigen Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wellenfunktion im k-Raum $\psi(\tilde{k}, t)$ ab.

(b) Zeigen Sie, dass diese partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion im k-Raum mit der Substitution $k = k_0 + \frac{mg}{\hbar}t$ in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar^2}t, t) = -i\frac{\hbar}{2m}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t)^2\tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) \tag{14}$$

übergeht.

(c) Berechnen Sie $\tilde{\psi}(k,t)$ und zeigen Sie, dass der mittlere Impuls $\langle \hat{p} \rangle = \hbar\langle k \rangle$ des Teilchens eine lineare Funktion der Zeit t ist.