Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 37.** *Kinetischer Impuls*
Im Gegensatz zum kanonischen Impuls $\hat{\vec{p}}$ ist der kinetische Impuls $m\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld invariant unter Eichtransformationen. Zeigen Sie, dass für $\hat{\vec{v}}$ folgende Vertauschungsregeln gelten:

$$[\hat{x}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1}$$

$$[m\hat{v}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B_k, \tag{2}$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

☗ **Aufgabe 38.** *Unitäre Invarianten*

Es seien $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ Operatoren auf einem separablem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\hat{U}$ ein unitärer Operator in $\mathcal{H}$. Man zeige:

(a)

$$\mathrm{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{B}\hat{C}\hat{A}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{C}\hat{A}\hat{B}\}. \tag{3}$$

(b)

$$\mathrm{Tr}\{\hat{A}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \tag{4}$$

$$\det\{\hat{A}\} = \det\{\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}\} = \prod_{i=1}^{\infty} a_i, \tag{5}$$

wobei a_i die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind.

☗ **Aufgabe 39.** *Determinante und Spur 1*

Gegeben sei ein selbstadjungierter Operator $\hat{A}$ auf einem separablem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man zeige für $\epsilon \ll 1$:

$$\det\{\mathbb{1} + \epsilon\hat{A}\} = 1 + \epsilon\mathrm{Tr}\{\hat{A}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{6}$$

Aufgabe 40. *Determinante und Spur 2*

Mit Hilfe von Aufgabe 38 zeige man für einen selbstadjungierten Operator auf einem separablem Hilbertraum

$$\det\{\exp\{\hat{A}\}\} = \exp\{\mathrm{Tr}\{\hat{A}\}\}. \tag{7}$$

Hinweis: Man betrachte $\hat{D}(\lambda) = \det\{\exp\{\lambda\hat{A}\}\}$ und stelle den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}\hat{D}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ durch einen Differenzenquotienten dar. Alternativ betrachte man eine unitäre Transformation $\hat{U}$, die $\hat{A}$ diagonalisiert.

Aufgabe 41. *Landau Niveaus - alternativer Zugang*

Es sei $\vec{B} = (0, 0, B)$ ein konstantes, homogenes Magnetfeld in z-Richtung. Das elektrische Feld und das skalare Potential seien gleich Null, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nur eine Funktion des Ortes ist. Zeigen Sie, dass dann der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\right)^2 = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel \tag{8}$$

sich in einen transversalen und longitudinalen Teil aufspalten lässt mit

$$\hat{H}_\perp = \frac{m}{2}\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right), \qquad \hat{H}_\parallel = \frac{m}{2}\hat{v}_z^2. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Teile kommutieren, d.h. $[\hat{H}_\perp, \hat{H}_\parallel] = 0$. Definieren Sie die Operatoren

$$\hat{Q} = \frac{\sqrt{m/M}}{\omega_c}\hat{v}_x, \qquad \hat{P} = \sqrt{mM}\hat{v}_y, \tag{10}$$

wobei $\omega_c = qB/m$ die Zyklotronfrequenz ist. Zeigen Sie, dass $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ die Vertauschungsregeln $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ erfüllen. Drücken Sie $\hat{H}_\perp$ durch $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ aus und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}_\perp$. Was sind die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ (*Landau Niveaus*)?