Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 30.** *Virialsatz*
Gegeben sei der Hamiltonoperator in einer Dimension

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{pot}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass in Ortsdarstellung gilt:

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right] = \hat{x}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{1}{m}\hat{p}^2. \tag{2}$$

(b) Sein nun φ_E ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Energie E. Folgern Sie aus (2), dass

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle_E = \frac{1}{2}\left\langle \hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)\right\rangle_E \tag{3}$$

gilt, wobei $\langle \bullet \rangle_E$ den Erwartungswert im Zustand φ_E bezeichnet.

(c) Nun sei speziell

$$V(\lambda x) = \lambda^n V(x), \tag{4}$$

d.h. $V(x)$ ist eine homogene Funktion vom Grad n. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\langle \hat{H}_{\text{kin}} \right\rangle_E = \frac{n}{2}\left\langle \hat{H}_{\text{pot}} \right\rangle_E \qquad \text{(Virialsatz)}. \tag{5}$$

Hinweis: Differentiation von (4) nach λ.

☗ **Aufgabe 31.** *Kinetischer Impuls*
Im Gegensatz zum kanonischen Impuls $\hat{\vec{p}}$ ist der kinetische Impuls $m\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld invariant unter Eichtransformationen. Zeigen Sie, dass für $\hat{\vec{v}}$ folgende Vertauschungsregeln gelten:

$$[\hat{x}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{6}$$

$$[m\hat{v}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B_k, \tag{7}$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Aufgabe 32. *Landau Niveaus - alternativer Zugang*
Es sei $\vec{B} = (0, 0, B)$ ein konstantes, homogenes Magnetfeld in z-Richtung. Das elektrische Feld und das skalare Potential seien gleich Null, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nur eine Funktion des Ortes ist. Zeigen Sie, dass dann der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\right)^2 = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel \tag{8}$$

sich in einen transversalen und longitudinalen Teil aufspalten lässt mit

$$\hat{H}_\perp = \frac{m}{2}\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right), \qquad \hat{H}_\parallel = \frac{m}{2}\hat{v}_z^2. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Teile kommutieren, d.h. $[\hat{H}_\perp, \hat{H}_\parallel] = 0$. Definieren Sie die Operatoren

$$\hat{Q} = \frac{\sqrt{m/M}}{\omega_c}\hat{v}_x, \qquad \hat{P} = \sqrt{mM}\hat{v}_y, \tag{10}$$

wobei $\omega_c = qB/m$ die Zyklotronfrequenz ist. Zeigen Sie, dass $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ die Vertauschungsregeln $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ erfüllen. Drücken Sie $\hat{H}_\perp$ durch $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ aus und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}_\perp$. Was sind die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ (*Landau Niveaus*)?