

Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus \blacksquare versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

► **Aufgabe 26. Radialimpuls**

Zeigen Sie, dass für den Operator des Abstandes vom Ursprung \hat{r} und die Radialkomponente des Impulses \hat{p}_r gilt:

$$[\hat{r}, \hat{p}_r] = i\hbar \quad (1)$$

$$[\hat{p}_r, \hat{L}^2] = 0. \quad (2)$$

► **Aufgabe 27. Quantenpunkt**

Ein kugelförmiger Halbleiter-Quantenpunkt kann durch ein freies Elektronengas in einem Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq R \\ \infty & \text{für } r > R \end{cases} \quad (3)$$

beschrieben werden. Bestimmen Sie die stationären Zustände der Einteilchen Schrödinger-Gleichung im Potential $V(r)$ und die zugehörigen Energien. Wie groß ist der Entartungsgrad der Eigenzustände?

Aufgabe 28. sphärischer harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2. \quad (4)$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen (ohne Normierung) in sphärischen Polarkoordinaten mit dem Ansatz

$$\phi_E(\vec{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (5)$$

Führen Sie dazu normierte Koordinaten $y = r/b$ und $E = \epsilon\hbar\omega$ ein, wobei $b^2 = \hbar/m\omega$, und verwenden Sie den Ansatz

$$u_l = y^{l+1}v(\rho) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad \rho = y^2, \quad (6)$$

der sich aus dem asymptotischen Verhalten der stationären Wellenfunktion ergibt. Für $v(\rho)$ sollten Sie die assoziierten Laguerre-Polynome erhalten.

Aufgabe 29. Runge-Lenz Vektor

Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz Vektor

$$\hat{\vec{F}} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}} \right) - \frac{\alpha}{\hat{r}} \hat{\vec{r}} \quad (7)$$

mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{\vec{p}}^2/2m - \alpha/r$ des Coulomb Potentials kommutiert.