Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 22.** *Drehimpuls*

Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{L}_z \equiv \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle$, $|m = 0\rangle$ und $|m = -1\rangle$ von $\hat{L}_z$ dar.

(a) Zeigen Sie, dass der Eigenwert von $\hat{\vec{L}}^2$ tatsächlich $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 1$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ jeweils zum Eigenwert $m = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Satz von Vektoren eine orthogonale, vollständige Basis bildet.

☗ **Aufgabe 23.** *Drehimpuls-Leiteroperatoren*

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\hat{\vec{L}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\right) + \hat{L}_z^2, \tag{1}$$

wobei die $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses bedeuten.

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ in sphärischen Polarkoordinaten die Polarkoordinatendarstellung der Leiteroperatoren her.

(b) Leiten Sie mit Hilfe von (1) die Darstellung von $\hat{\vec{L}}^2$ in sphärischen Polarkoordinaten her und zeigen Sie damit, dass sich der 3-dimensionale Laplaceoperator in Kugelkoordinaten durch $\hat{\vec{L}}^2$ ausdrücken lässt:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 24. *Spin 1*

(a) Zeigen Sie, dass die sogenannten Spinmatrizen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

den Vertauschungsregeln $[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$ und $[\hat{s}_i, \hat{\vec{s}}^2] = 0$ des Drehimpulses genügen. Was ist $\hat{\vec{s}}^2$ und welche Eigenwerte hat dieser Operator?

(b) Die Eigenzustände (Eigenspinore) von $\hat{s}_z$ sind

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Linearkombinationen von $\Psi_\pm$ sind Eigenspinore von $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y$?

Aufgabe 25. *Spin 2*

Die allgemeine Spin-Komponente eines Spin-1/2 Systems ist $\hat{s}_{\vec{n}} := 1/2\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$, wobei $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ der allgemeine Einheitsvektor ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{s}_{\vec{n}}$ und einen vollständigen Satz orthonormierter Eigenzustände. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$ in diesen Eigenzuständen.