Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 19.** *Baker-Hausdorff-Theorem*

(a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und komplexe Zahlen x gilt:

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]x + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]x^2 + \dots \tag{1}$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}$

(b) Unter Verwendung von Gleichung (1) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}, \tag{2}$$

falls $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0$.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von $\hat{f}$ und der Verwendung von $e^{-x\hat{A}}e^{x\hat{A}} = \mathbb{1}$.

Aufgabe 20. *Kohärente Zustände*

(a) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle\alpha|\beta\rangle$?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems, dass für einen kohärenten Zustand gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)|0\rangle\,, \tag{3}$$

wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 0 bedeutet.

(c) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände übervollständig sind, d.h.

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}, \tag{4}$$

wobei $\int \mathrm{d}^2\alpha = \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$ mit $\alpha = u + iv = re^{i\varphi}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^n e^{-x} = n!$.

Bitte wenden!

Aufgabe 21. *Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten*

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2, \tag{5}$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

(a) Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

(b) Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen ξ und η ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.Allg. die in (a) gefundene Entartung aufhebt.