Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 13.** *Wellenpakete*
Betrachten Sie ein Wellenpaket in einer Dimension

$$\widetilde{\psi}(k,0) = A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\sigma_k^2}}.$$

Verifizieren Sie die in der Vorlesung gefundenen Ergebnisse:

$$\psi(x,0) = \frac{A\sigma_k}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2\sigma_k^2} = \frac{A}{2\sigma_x\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}$$

mit $\sigma_x = 1/2\sigma_k$, sowie

$$\psi(x,t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m})}}.$$

Zeigen Sie ferner

$$\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta x(0)^2},$$
$$\Delta p(t)^2 = \Delta p(0)^2.$$

Aufgabe 14. *Unendliches Kastenpotential*
Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. D.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die stationären Wellenfunktionen $\phi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n sind in der Vorlesung berechnet worden.

(a) Zeigen Sie,dass die allgemeine zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \psi_0(x)$ in der Form

$$\psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

geschrieben werden kann. Wodurch sind die α_n bestimmt?

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion durch $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$. Zeigen Sie, dass nach einer halben Periode der Grundschwingung $T/2$ die Funktion in ihr Spiegelbild bezüglich $x = L/2$ übergeht, d.h. dass gilt $\psi(x, T/2) = -\psi(L-x, 0) = -\psi_0(L-x)$. Was passiert nach Vielfachen von T?

Bitte wenden!

Aufgabe 15. *Freier Fall II*
Es werde erneut das Problem aus Aufgabe 12 betrachtet.

(a) Man zeige, dass die stationäre Wellenfunktion zur Energie E gegeben ist durch

$$\phi_E(x) = \mathcal{N}\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{l_0} - \frac{E}{\epsilon_0}\right).$$

Hierbei ist $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante und $l_0 = (\hbar^2/2m^2g)^{1/3}$ und $\epsilon_0 = (\hbar^2 mg^2/2)^{1/3}$ sind die Standardlänge und -Energie.

$$\mathrm{Ai}(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(i(yx + \frac{1}{3}y^3)\right)$$

ist Airysche Funktion. Zeigen Sie erst, dass diese der Differentialgleichung

$$\mathrm{Ai}''(x) - x\mathrm{Ai}(x) = 0$$

genügt. Ihre kleinsten Nullstellen sind $-2.3381\ldots$, $-4.0879\ldots$, $-5.52055\ldots$.

(b) Nun falle das Teilchen auf eine harte Oberfläche bei $x = 0$, d.h. das Potential sei

$$V(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Was muss für $\phi(x)$ für $x \leq 0$ gelten? Was folgt daraus für die erlaubten Energiewerte, wenn man für $x > 0$ den obigen Ansatz für die Wellenfunktion verwendet?