Hinweis zur Übungsabgabe: Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

Aufgabe 10. *Kommutatoren*

(a) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ unterschiedliche Operatoren. Zeigen Sie:

(i) $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}]$,
(ii) $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$.

(b) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass $\hat{A}\hat{B}$ hermitesch ist, wenn $[\hat{A},\hat{B}] = 0$.

(c) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei kommutierende Operatoren. Sei $|a\rangle$ Eigenzustand von $\hat{A}$ zum Eigenwert a. Zeigen Sie, dass $\hat{B}\,|a\rangle$ ebenfalls Eigenzustand von $\hat{A}$ ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 11. *Unschärferelation*

(a) Es sei $[\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}$ und $[\hat{A},\hat{C}] = \hat{B}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(\hat{A}\hat{B})\Delta\hat{C} \geq \frac{1}{2}\langle\hat{A}^2 + \hat{B}^2\rangle \tag{1}$$

gilt.

(b) In einer räumlichen Dimension gilt:

$$\langle\Delta\hat{r}_\alpha^2\rangle\langle\Delta\hat{p}_\alpha^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \tag{2}$$

wobei $\alpha = x, y, z$ ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle\Delta\hat{\vec{r}}^{\,2}\rangle\langle\Delta\hat{\vec{p}}^{\,2}\rangle \geq \frac{9\hbar^2}{4}. \tag{3}$$

Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $\langle\Delta\hat{r}_\alpha\rangle = \langle\Delta\hat{p}_\alpha\rangle = 0$ ist und verwenden Sie die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \qquad \text{für } a, b > 0. \tag{4}$$

Aufgabe 12. *Freier Fall*
Die eindimensionale Schrödingergleichung bei Vorhandensein einer konstanten Kraft $F = -mg$ (freier Fall) lautet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx\right]\psi(x,t). \tag{5}$$

(a) Leiten Sie aus der obigen Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wellenfunktion im k-Raum $\tilde{\psi(k,t)}$ ab.

(b) Zeigen Sie, dass diese partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion im k-Raum mit der Substitution $k = k_0 + \frac{mg}{\hbar}t$ in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) = -i\frac{\hbar}{2m}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t)^2\tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t) \tag{6}$$

übergeht.

(c) Berechnen Sie $\tilde{\psi}(k, t)$ und zeigen Sie, dass der mittlere Impuls $\langle \hat{p} \rangle = \hbar\langle k \rangle$ des Teilchens eine lineare Funktion der Zeit t ist.