Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 40.** *Zeemaneffekt - Störungstheorie*
Das magnetische Moment eines Elektrons in einem Zentralpotential setzt sich zusammen aus einem Bahndrehimpuls und einem Spinanteil:

$$\hat{\vec{\mu}} = \mu_B(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}})$$

wobei $\mu_B := e\hbar/2m$ das Bohrsche Magneton bedeutet. Die Energie dieses magnetischen Moments in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\hat{H}_Z = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}.$$

Für kleine Magnetfeldstärken führt $\hat{H}_Z$ zu einer Aufspaltung der entarteten Zustände mit festem l und j. Berechnen Sie diese Aufspaltung in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ für $l = 1$ und $j = l - s = 1/2$ in erster Ordnung Störungstheorie.

☗ **Aufgabe 41.** *modifiziertes Coulombpotential - Störungstheorie*
Aufgrund quantenelektrodynamischer Korrekturen ist das Coulombpotential bei kleinen Abständen gemäß

$$\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\int_0^1 \frac{dy}{y}\left(1 + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{1-y}\ \exp\left\{-\frac{r/a_e}{\alpha\sqrt{y}}\right\}\right]$$

modifiziert, wobei $\alpha = 1/137.036...$ die Feinstrukturkonstante und a_e der Bohrsche Radius ist. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Verschiebung der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms. Der Spin des Elektrons und die damit zusammenhängende Entartung sind hierbei irrelevant und sollen vernachlässigt werden.
Hinweis: Benutzen Sie zur Approximation des auftretenden Integrals, daß $\alpha \ll 1$ ist und

$$\int_0^1 dy \left(1 + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{1-y} = \frac{4}{5}.$$

Aufgabe 42. *anharmonischer Oszillator*
Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit einer kleinen anharmonischen Störung $\hat{H}_1$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$
$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2\hat{x}^2$$
$$\hat{H}_1 = \alpha\sqrt{2}\frac{\hat{x}^3}{l_0^3}$$

wobei $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ die Oszillatorlänge bedeutet und α eine positive Größe ist.
Berechnen Sie die Energiekorrektur des Grundzustandes von $\hat{H}_0$ durch die Störung $\hat{H}_1$ in niedrigster *nicht verschwindender* Ordnung der Störungstheorie.
Hinweis: Benutzen Sie, daß ein Produkt aus k Aufsteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und l Absteigeoperatoren

$\hat{a}$ in beliebiger Reihenfolge angewandt auf einen Eigenzustand $|n\rangle$ von $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ einen Zustand proportional $|n+k-l\rangle$ liefert.