

Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinen Haus ■ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

■ **Aufgabe 36.** *unitäre Invarianten*

Es seien $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ Operatoren in einem separablem Hilbertraum \mathcal{H} und \hat{U} ein unitärer Operator in \mathcal{H} . Man zeige:

(a)

$$\mathrm{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{B}\hat{C}\hat{A}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{C}\hat{A}\hat{B}\}. \quad (1)$$

(b)

$$\mathrm{Tr}\{\hat{A}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad (2)$$

$$\det\{\hat{A}\} = \det\{\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}\} = \prod_{i=1}^{\infty} a_i, \quad (3)$$

wobei a_i die Eigenwerte von \hat{A} sind.

■ **Aufgabe 37.** *Determinante und Spur 1*

Gegeben sei ein selbstadjungierter Operator \hat{A} auf einem separablem Hilbertraum \mathcal{H} . Man zeige für $\epsilon \ll 1$:

$$\det\{\mathbb{1} + \epsilon\hat{A}\} = 1 + \epsilon\mathrm{Tr}\{\hat{A}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4)$$

Aufgabe 38. *Determinante und Spur 2*

Mit Hilfe von Aufgabe 37 zeige man für einen selbstadjungierten Operator in einem separablem Hilbertraum

$$\det\{\exp\{\hat{A}\}\} = \exp\{\mathrm{Tr}\{\hat{A}\}\}. \quad (5)$$

Hinweis: Man betrachte $\hat{D}(\lambda) = \det\{\exp\{\lambda\hat{A}\}\}$ und stelle den Differentialquotienten $\frac{d\hat{D}(\lambda)}{d\lambda}$ durch einen Differenzenquotienten dar. Alternativ betrachte man eine unitäre Transformation \hat{U} , die \hat{A} diagonalisiert.

Aufgabe 39. *Heisenbergbild*

Man löse die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ für ein freies Teilchen in einer Dimension und berechne die Kommutatoren $[\hat{x}_H(0), \hat{x}_H(t)]$ und $[\hat{p}_H(0), \hat{p}_H(t)]$. Was implizieren diese Ergebnisse für die Dynamik eines anfänglich lokalisierten Wellenpakets?