Hinweis zur Übungsabgabe: Aufgaben, welche mit einem kleinem Haus ☗ versehen sind, sollen als Hausaufgabe bearbeitet werden. Die Übungsblätter bitte in die vorgesehenen Briefkästen im 5. Stock, Gebäude 46 einwerfen.

☗ **Aufgabe 33.** *Spinpräzession*

Man betrachte ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Bei Vernachlässigung der Bewegung des Teilchens lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu}{\hbar}\vec{B}(t) \cdot \hat{\vec{S}}. \tag{1}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens gegeben durch den zwei-komponentigen Vektor

$$\chi(0) = \alpha\chi_+ + \beta\chi_-, \tag{2}$$

wobei $\chi_\pm$ die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ mit Eigenwerten $\pm\hbar/2$ bedeuten. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{S}_x(t)\rangle$, $\langle\hat{S}_y(t)\rangle$ und $\langle\hat{S}_z(t)\rangle$.

☗ **Aufgabe 34.** *magnetische Resonanz*

Man betrachte wiederum ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld aus der Aufgabe 33. Es sei nun $B(t) = (-B_\perp \cos(\omega t), B_\perp \sin(\omega t), B_\parallel)$. Der Zustand des Teilchens zur Zeit t kann in der Form

$$\chi(t) = \alpha(t)\chi_+ + \beta(t)\chi_-, \tag{3}$$

geschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Schrödingergleichung für $\chi(t)$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ aus Gleichung (1) die Matrixgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \Omega_\parallel & \Omega_\perp e^{i\omega t} \\ \Omega_\perp e^{-i\omega t} & -\Omega_\parallel \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mit $\hbar\Omega_\parallel = \mu B_\parallel$ und $\hbar\Omega_\perp = \mu B_\perp$.

(b) Lösen Sie (4) mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0) = 1$,$\beta(0) = 0$.

(c) Unter welcher Bedingung an die Frequenz ω und zu welchen Zeiten gilt $\chi(t) \propto \chi_-$?

Aufgabe 35. *Drehimpuls 2*

Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{L}_z \equiv \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle$, $|m = 0\rangle$ und $|m = -1\rangle$ von $\hat{L}_z$ dar. In Ortsdarstellung sind die Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ zu $l = 1$ die Kugelflächenfunktionen $Y_{1,0}(\theta, \phi)$ und $Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi)$. Skizzieren Sie in einer geeigneten Darstellung das Absolutquadrat der Eigenvektoren von $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$.