

”Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.“ – Niels Bohr

Aufgabe 1. Doppelspalt

Betrachten sie das skizzierte Doppelspaltexperiment. Die Wellenamplitude auf dem Schirm ist

$$\psi_1(y) = \sqrt{\frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{i(wt-ay)}}, \quad (1)$$

wenn nur einer der Spalte offen ist und

$$\psi_2(y) = \sqrt{\frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{i(wt-(a+b)y)}}, \quad (2)$$

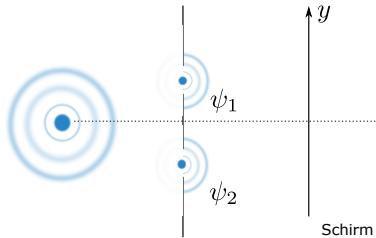
wenn nur der andere Spalt offen ist. Berechnen Sie die Gesamtintensität I auf dem Schirm, wenn:

(a) Intensitäten addiert werden, d.h.

$$I = |\psi_1(y)|^2 + |\psi_2(y)|^2. \quad (3)$$

(b) Wellenamplituden addiert werden, d.h.

$$I = |\psi_1(y) + \psi_2(y)|^2. \quad (4)$$



Aufgabe 2. Wellenfunktionen

Die Wellenfunktionen eines Teilchens in einer Dimension seien

(a) $\psi_1 = A_1 e^{-\frac{x^2}{4}}$

(b) $\psi_2 = A_2 x e^{-\frac{x^2}{8}}$

(c) $\psi_3 = A_3 \left(e^{-\frac{x^2}{4}} + x e^{-\frac{x^2}{8}} \right)$

Bestimmen Sie den Betrag von A_1 , A_2 und A_3 , so dass die Wellenfunktionen normiert sind, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_j|^2 = 1 \quad (5)$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Operatoren

Gegeben seien die folgenden Operatoren:

- (i) $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x}$ mit $\hat{D}\psi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$
- (ii) $\hat{1}\!\!1$ mit $\hat{1}\!\!1\psi(x) = \psi(x)$
- (iii) \hat{F} mit $\hat{F}\psi(x) = f(x)\psi(x)$
- (iv) \hat{P} mit $\hat{P}\psi(x) = \psi(x)^3 + 3\psi(x)^2 - 4$
- (v) \hat{Q} mit $\hat{Q}\psi(x) = \int_0^1 dx\psi(x).$

- (a) Welche dieser Operatoren sind linear?
- (b) Konstruieren Sie für A die inversen \hat{A}^{-1} mit $\hat{A} = \hat{D}, \hat{1}\!\!1, \hat{F}$, falls diese existieren.
- (c) Zeigen Sie, dass $i\hat{D}$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 4. Adjungierter Operator

Zeigen Sie

- (a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$
- (b) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
- (c) wenn ein Operator \hat{B} einen Eigenwert b hat mit $b \neq b^*$, dann ist $\hat{B} \neq \hat{B}^\dagger$.

Der *Kommutator* zweier Operatoren \hat{A}, \hat{B} ist definiert als

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (6)$$

- (d) Zeigen Sie: Falls $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, dann gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad (7)$$

Aufgabe 5. Komplexe Konjugation

Betrachten Sie einen Operator \hat{C} mit folgender Eigenschaft

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x)^* \quad (8)$$

- (a) Ist \hat{C} hermitesch?
- (b) Was sind die Eigenfunktionen von \hat{C} ?
- (c) Was sind die Eigenwerte von \hat{C} ?