Aufgabe 27.
Betrachtet werde ein freies Dirac Teilchen unter der unitären Transformation $\Phi = \widehat{U}\Psi$, $\widehat{U} = e^{i\widehat{S}}$ (Foldy-Wouthuysen Thansformation) in Impulsdarstellung mit

$$\widehat{S} = -\frac{i}{2m_0 c}\beta\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p} f\left(\frac{p}{m_0 c}\right)$$

$(p = |\overrightarrow{p}|)$.

(a) Zeigen Sie

$$\beta e^{-i\widehat{S}} = e^{i\widehat{S}}\beta.$$

(b) Zeigen Sie durch Reihenentwicklung von $e^{2i\widehat{S}}$ daß der Hamiltonoperator eines freien Dirac Teilchens nach der unitären Transformation $H_\Phi = e^{i\widehat{S}}He^{-i\widehat{S}} = e^{2i\widehat{S}}\left(c\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p} + \beta m_0 c^2\right)$ übergeht

$$\widehat{H}_\Phi = \beta\left[m_0c^2\cos\left(yf\left(y\right)\right) + cp\sin\left(yf\left(y\right)\right)\right] + \frac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p}}{p}\left[cp\cos\left(yf\left(y\right)\right) - m_0c^2\sin\left(yf\left(y\right)\right)\right] \tag{1}$$

wobei $y = p/m_0c$.

(c) Zeigen Sie, daß mit der Wahl $f\left(y\right) = \frac{1}{y}\arctan\left(y\right)$ der zweite Term in (1) verschwindet.

Aufgabe 28.
Bestimmen Sie die Wellenfunktionen freier Spinoren mit Impuls p, Energieprojektion $\lambda = \pm 1$ und Helizität $\pm\hbar/2$

$$\Phi_{p,\pm 1,\pm\frac{1}{2}}\left(\overrightarrow{r}\right)$$

in Foldy-Wouthuysen Darstellung.

Aufgabe 29.
Betrachten Sie eine Lie Gruppe der unitären Operatoren

$$\widehat{U}\left(\alpha_\mu\right) = e^{-i\widehat{L}_\mu\alpha_\mu}$$

mit Generatoren $\widehat{L}_\mu$ Zeigen Sie explizit mittels Hintereinanderausführung infinitesimaler Operationen

$$\widehat{U}^{-1}\left(\delta\beta_\mu\right)\widehat{U}^{-1}\left(\delta\alpha_\mu\right)\widehat{U}\left(\delta\beta_\mu\right)\widehat{U}\left(\delta\alpha_\mu\right)$$

daß für die Generatoren $\widehat{L}_\mu$ eine Lie Algebra

$$\left[\widehat{L}_\mu, \widehat{L}_\nu\right] = C_{\mu\nu\lambda}\widehat{L}_\lambda$$

folgt.

Aufgabe 30.
Zeigen Sie

$$\left[\left[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j\right], \widehat{L}_k\right] + \left[\left[\widehat{L}_j, \widehat{L}_k\right], \widehat{L}_i\right] + \left[\left[\widehat{L}_k, \widehat{L}_i\right], \widehat{L}_j\right] = 0$$

und folgern Sie daraus die Beziehung für die Strukturkonstanten

$$C_{ijm}C_{mkn} + C_{jkm}C_{min} + C_{kim}C_{mjn} = 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie (2) speziell für die $SO\,(3)$ mit

$$\left[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\widehat{J}_k$$