Aufgabe 20.
Betrachten Sie ein freies Dirac-Teilchen mit

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2$$

Zeigen Sie, daß weder der Bahndrehimpuls $\widehat{\vec{L}}$ noch der Spin $\widehat{\vec{S}}$ Erhaltungsgrößen sind jedoch der Gesamtdrehimpuls $\widehat{\vec{J}} = \widehat{\vec{L}} + \widehat{\vec{S}}$.

Aufgabe 21.
Berechnen Sie explizit alle 6 von Null verschiedenen Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right].$$

Aufgabe 22.
Zeigen Sie, daß für den Transformationsoperator von Dirac-Spinoren für eigentliche Lorentztransformationen

$$S = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\omega\sigma_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\right\}$$

gilt

$$S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0.$$

Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst für räumliche Drehungen , für die gilt $I^{0\nu} = I^{\mu 0} = 0$, und dann für Lorentzboosts parallel zur $x-$Achse, d.h. $S = \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{v}{c}\sigma_{01}\right)$.

Aufgabe 23.
Eine Eigenlösung des Dirac-Hamiltonoperators zu verschwindendem Impuls $\vec{p} = 0$ ist

$$\Psi_1\left(\vec{r}, t\right) = \frac{1}{\sqrt{V}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\exp\left(-i\frac{m_0 c^2}{\hbar}t\right)$$

Konstruieren Sie aus Ψ_1 eine Lösung zu endlichem Impuls $\vec{p} = (p_x, 0, 0)$ mit Hilfe der Lorentztransformation und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis von Aufgabe 17 Blatt 5.