

Aufgabe 15.

Zeigen Sie daß die Lösungen α_i, β der Dirac Algebra

$$\alpha_i \alpha_n + \alpha_n \alpha_i = 2\delta_{in} \mathbb{1},$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0,$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1},$$

nur bis auf eine unitäre Transformation bestimmt sind.

Aufgabe 16.

Zeigen Sie daß gilt

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbb{1}_2 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}).$$

Aufgabe 17.

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der freien Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m_0 c^2) \Psi$$

mit dem Ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} e^{-i \frac{Et}{\hbar}}.$$

Aufgabe 18.

Zeigen Sie explizit die Invarianz der Dirac Gleichung im äußeren elektromagnetischen Feld

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left\{ c \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + e A_0 + m_0 c^2 \right\} \Psi$$

unter Eichphasentransformationen

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^\mu},$$

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \Psi(x) e^{-i \frac{e \lambda(x)}{\hbar c}}.$$

Aufgabe 19.

Bestimmen Sie den wahren Einteilchengeschwindigkeitsoperator $\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]$ eines Dirac Teilchens und vergleichen Sie diesen mit

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\vec{x}, \hat{H}] = c \vec{\alpha}$$

Was sind die Eigenwerte und Eigenzustände des wahren Einteilchengeschwindigkeitsoperators? Vergleichen Sie die Resultate mit einem klassischen relativistischen Teilchen.