**Aufgabe 12.**
Betrachten Sie ein Klein-Gordon Teilchen in einem Coulombpotential

$$V\left(\overrightarrow{r}\right) = V\left(r\right) = -\frac{Ze^2}{r}$$

Zeigen Sie, daß die stationäre Klein-Gordon Gleichung zur Energie $E$ die Form

$$\left[\left(E - V\left(r\right)\right)^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \Delta\right] \psi = 0$$

annimmt. Separieren Sie Winkel- und Radialanteil und leiten Sie eine Gleichung für den Radialanteil ab.

**Aufgabe 13.**
Zeigen Sie explizit, daß der Impulsoperator $\widehat{\overrightarrow{p}} = \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}$ ein wahrer Einteilchenoperator ist jedoch nicht der Ortsoperator $\widehat{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{x}$ . Benutzen Sie dazu, daß sich ein allgemeiner Zustand zu positiver Frequenz bzw. negativer Frequenz in der Form

$$\Psi_{(+)} = \int d^3\overrightarrow{p}\, A\left(\overrightarrow{p}\right) \begin{pmatrix} m_0c^2 + \hbar\omega_p \\ m_0c^2 - \hbar\omega_p \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}}{\hbar} - \omega_p t\right)}$$

$$\Psi_{(-)} = \int d^3\overrightarrow{p}\, \widetilde{A}\left(\overrightarrow{p}\right) \begin{pmatrix} m_0c^2 - \hbar\omega_p \\ m_0c^2 + \hbar\omega_p \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}}{\hbar} + \omega_p t\right)}$$

mit $\hbar\omega_p = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ schreiben lässt.

**Aufgabe 14.**
Zeigen Sie, daß die $4 \times 4$ Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Eigenschaften haben:

$$\{\alpha_i, \alpha_n\} = \alpha_i\alpha_n + \alpha_n\alpha_i = 2\delta_{in}\mathbb{1}_4$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}_4$$

wobei $\mathbb{1}_d$ die $d$-dimensionale Einheitsmatrix und die $\sigma_i$ die Paulimatrizen sind.