Aufgabe 8.
Betrachten Sie zwei Inertialsystem Σ und Σ' mit parallelen Achsen mit einer Relativgeschwindigkeit $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e}_x$. Die Transformation zwischen Σ und Σ' ist durch die Relation

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \quad x^{2\prime} = x^2, \quad x^{3\prime} = x^3$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix $A(v)$ aus dem 2. Postulat der Relativitätstheorie, der Forderung $A^{-1}(v) = A(-v)$ sowie der Linearität der Transformation.

Aufgabe 9.
Die kontravarianten Vierervektoren von Ort und Impuls sind $x^\mu : \{ct, x, y, z\} = \{ct, \overrightarrow{r}\}$ sowie $p^\mu : \{\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\} = \{\frac{E}{c}, \overrightarrow{p}\}$. Bestimmen Sie die Form der zugehörigen Operatoren in Orts- und Impulsdarstellung die den Vertauschungsregeln

$$[\widehat{x}^\mu, \widehat{p}^\nu] = -i\hbar g^{\mu\upsilon}$$

genügen.

Aufgabe 10.
Zeigen Sie, daß die Klein-Gordon Gleichung

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4\right)\psi$$

invariant unter Lorentztransformationen ist. Zeigen Sie ferner, daß die durch

$$\psi = \varphi + \chi \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = m_0 c^2 (\varphi - \chi)$$

definierten Funktionen φ und χ der Gleichung genügen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \widehat{H}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{\widehat{\overrightarrow{p}}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0 c^2$$

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die Klein-Gordon Gleichung in Schrödinger-Darstellung (Aufg. 10)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \widehat{H}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Lösungen von (1) für ein freies Teilchen mit Ladung $Q = \int_{L^3} \rho d^3x = \pm 1$ im Periodizitätsvolumen (Quantisierungsvolumen) L^3 . Zeigen Sie, daß im nichtrelativistischen

Grenzfall gilt:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{(+)} \\ \chi_{(+)} \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar} - \omega_p t\right)}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{(-)} \\ \chi_{(-)} \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar} + \omega_p t\right)}$$