Aufgabe 5.
Zur Ableitung des Zusammenhangs zwischen Streuamplituden und Streuphasen wurde in der Vorlesung der Zusammenhang

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l\,(kr)\, P_l\,(\cos\theta)$$

verwendet, wobei die j_l die sphärischen Besselfunktionen bedeuten. Zeigen Sie dass diese Relation gilt. Man verwende dazu

$$j_l\,(x) = \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^{1} d\xi\, e^{ix\xi}\, P_l\,(\xi)\,.$$

Hinweis: Man entwickle $e^{ikr\cos\theta}$ nach Kugelflächenfunktionen und bestimme die Koeffizienten.

Aufgabe 6.
Betrachtet werde die Streuung an einem Hartkugelpotential

$$V\,(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Die stationären Lösungen der Schrödingergleichung haben die Form

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_{kl}\,(r)\, P_l\,(\cos\theta)$$

wobei $R_{kl}\,(r)$ der Radialgleichung ($E = \hbar^2 k^2/2m$)

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l\,(l+1)}{r^2} + k^2\right] R_{kl}\,(r) = 0 \tag{1}$$

genügt.

(a) Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung von (1) in der Form

$$R_{kl}\,(r) = B_l\,[\cos(\delta_l)\, j_l\,(kr) - \sin(\delta_l)\, n_l\,(kr)]$$

geschrieben werden kann, wobei die $j_l\,(kr)$ und $n_l\,(kr)$ die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen bedeuten und δ_l die Streuphase der l-ten Partialwelle ist.

(b) Geben Sie einen Ausdruck für die Streuphasen δ_l an.

(c) Bestimmen Sie die s-Wellenstreulänge a_0 sowie den Streuquerschnitt in s-Wellennäherung.

Aufgabe 7.
Für die Streuung quantenmechanischer Punktteilchen der Masse m und Energie E an einem

Streuzentrum mit der charakteristischen Länge r_0 findet man die Streuphasen

$$\tan \delta_l = -\frac{(r_0 k)^{2l+1}}{(2l+1)\left[(2l-1)!!\right]^2}$$

(a) Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für den totalen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie E ab.

(b) Für welche Energien E ist die s-Wellenstreuung eine gute Näherung?